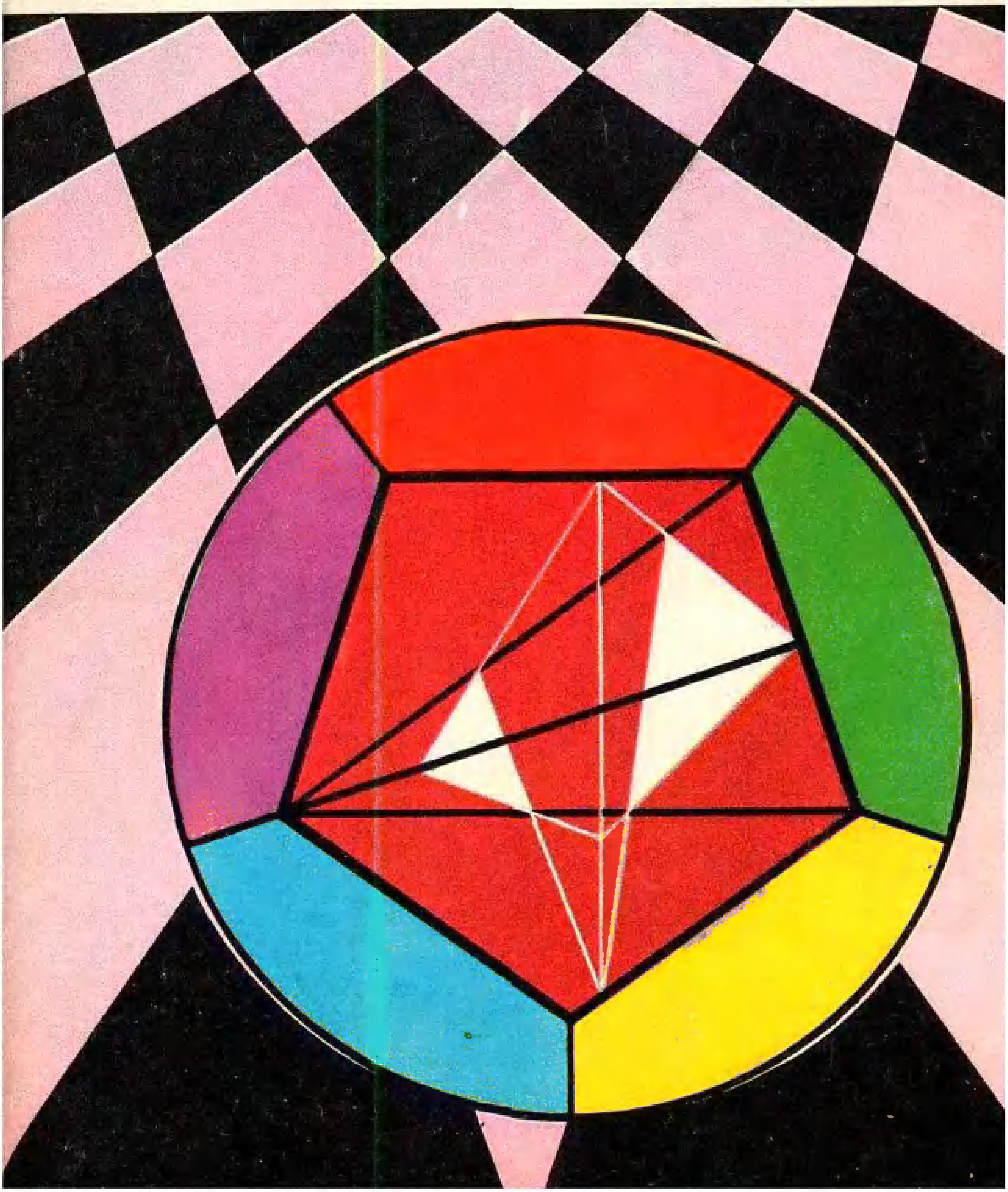
Квант

1974
3

Научно-популярный физико-математический журнал



На первой странице обложки помещена композиция на темы статей А. П. Савина «Проективная плоскость» и Е. Я. Гика «Проективные шахматы» (с. 9—19).

На фоне перспективного изображения шахматной доски нарисована модель проективной плоскости — круг, диаметрально противоположные точки которого считаются склеенными. Шесть разноцветных областей на этом круге попарно граничат друг с другом, поэтому для правильной раскраски полученной карты нужно шесть красок. Рисунок в средней области относится к теореме Дезарга — одной из красивейших теорем проективной геометрии (см. также с. 36).

На второй странице обложки вы видите бумажное кольцо, разрезанное по длине. Это кольцо склеено из перекрученной бумажной полоски. Если полоску до склеивания закрутить на пол-оборота, то после склеивания получится лист Мебиуса; на приведенном рисунке полоска перекручена на полтора оборота.

Видно, что после разрезания по длине кольцо не распадается на два куска. Оказывается, можно изготовить такое кольцо, что, разрезав его по длине, мы получим цепь из двух или даже трех колец. Об этом рассказано в статье Б. А. Кордемского «Топологические опыты своими руками» (с. 73—75).

Основан в 1970 году.

Квант

1974
3

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Л. А. АРЦИМОВИЧ

ПЛАЗМА — ЧЕТВЕРТОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕЩЕСТВА

Плазма — весьма распространенное в природе состояние вещества. Ее изучение началось сравнительно недавно. С физикой плазмы человечество связывает очень большие надежды, прежде всего, в области энергетики. Именно физика плазмы должна решить проблему осуществления управляемых термоядерных реакций и создания термоядерных электростанций. К ней же относятся работы по новым методам получения электрической энергии за счет обычного топлива без помощи паровых котлов и турбин, а также электрических генераторов.

Помещаемая ниже статья принадлежит недавно скончавшемуся члену редакционной коллегии нашего журнала академику Льву Андреевичу Арцимовичу. Он был руководителем советских исследований в области управляемых термоядерных реакций. Именно ему и его сотрудникам удалось впервые осуществить такие реакции в лабораторных условиях.

Текст статьи заимствован из введения к научно-популярной книге Л. А. Арцимовича «Элементарная физика плазмы», выпущенной в свет издательством «Атомиздат» третьим изданием в 1969 году. Публикацию подготовил В. А. Лешковцев.

Пусть в замкнутом сосуде, сделанном из очень тугоплавкого материала, находится небольшое количество какого-либо вещества. Начнем подогревать сосуд, постепенно повышая его температуру. Если первоначально вещество, содержащееся в сосуде, было в твердом состоянии, то при возрастании температуры оно в некоторый момент начнет плавиться, а при еще более высокой температуре испарится, и образовавшийся газ равномерно заполнит весь объем. Когда температура достигнет достаточно высокого уровня, все молекулы газа (если это молекулярный газ, как, например, водород, азот или кислород) диссоциируют, то есть распадутся на отдельные атомы. В результате внутри сосуда будет содержаться газообразная смесь элементов, из которых состоит вещество. Атомы этих элементов будут быстро и совершенно беспорядочно двигаться, испытывая время от времени случайные столкновения между собой.

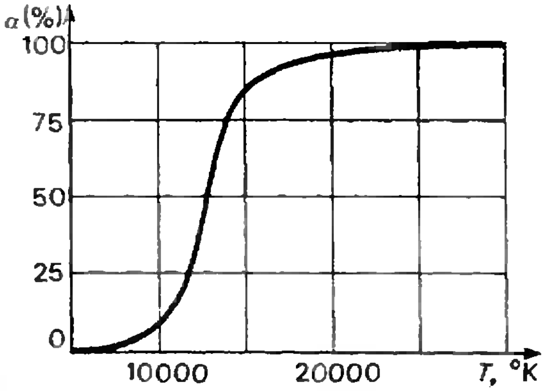
Средняя скорость хаотического теплового движения атомов растет пропорционально квадратному корню из абсолютной температуры газа. Она тем больше, чем легче газ, то есть чем меньше атомный вес вещества. Величину средней скорости $\bar{v}$ можно найти с помощью следующей формулы:

$$\bar{v} = 1{,}3\cdot 10^4\sqrt{\frac{T}{A}}. \qquad (1)$$

Здесь T — абсолютная температура и A — атомный вес вещества. Из формулы (1) следует, например, что, при $T = 1000\,^\circ K$ средняя скорость атомов водорода составит около $4\cdot 10^3$ *м/с*, а средняя скорость атомов ртути — всего лишь $3\cdot 10^2$ *м/с*.

Изменяя температуру от наиболее низкого уровня, соответствующего технике глубокого охлаждения (несколько градусов от абсолютного нуля), до нескольких тысяч градусов, мы можем заставить практически любое вещество пройти через все три состояния — твердое, жидкое и газообразное. Естественно возникает вопрос: как будут изменяться свойства вещества, если нагревание продолжится дальше и температура выйдет за пределы нескольких тысяч градусов? Конечно, при очень высокой температуре изображаемую нами картину нагревания вещества в тугоплавком сосуде можно представить только теоретически, так как предел термической стойкости даже самых тугоплавких материалов сравнительно невелик — не более 3000—4000 °К. Однако это практическое возражение не снимает вопроса о том, как будет вести себя вещество при непрерывном повышении его температуры. Поэтому мы не будем пока отказываться от принятой простой схемы. Допустим, что стенки сосуда обладают волшебной способностью противостоять сколь угодно высокой температуре, не разрушаясь и не испытывая никаких изменений. Итак, нагревание продолжается. В таком случае уже при 3000—5000 °К мы сможем заметить первые признаки появления новых процессов, которые будут связаны с изменением свойств самих атомов вещества.

Как известно, каждый атом состоит из положительно заряженного ядра, в котором сосредоточена почти вся масса атома, и электронов, вращающихся вокруг ядра и образующих в совокупности так называемую электронную оболочку атома. Эта оболочка и в особенности ее внешний слой, содержащий электроны, сравнительно слабо связанные с атомным ядром, обладают довольно хрупкой структурой. При столкновении атома с какой-либо быстро двигающейся частицей один из внешних электронов может быть оторван от атома, который превратится в положительно заряженный ион. Именно этот процесс ионизации и будет наиболее характерным для рассматриваемой стадии нагревания вещества. При достаточно высокой температуре газ перестает быть



нейтральным: в нем появляются положительные ионы и свободные электроны, оторванные от атомов.

С увеличением температуры относительная доля ионов и электронов в этой смеси очень быстро возрастает. В условиях, когда нагретое вещество находится в тепловом равновесии с окружающей средой (в нашем случае со стенками воображаемого идеального сосуда) при температуре в несколько десятков тысяч градусов, подавляющая часть атомов в любом газе ионизирована и нейтральные атомы практически отсутствуют.

Кривая на рисунке показывает, как должна расти с температурой относительная доля ионизированных атомов в водороде. По оси абсцисс отложена абсолютная температура, по оси ординат — величина α — отношение числа положительных ионов к числу нейтральных атомов, первоначально имевшихся в газе, в процентах. Степень ионизации α зависит не только от температуры, но и от плотности газа (хотя и не так сильно). Поэтому для определенности отметим, что рисунок относится к тому случаю, когда в 1 *см*^{3} газа полное число положительных ионов и нейтральных атомов равно $7 \cdot 10^{16}$. При комнатной температуре газ с такой плотностью будет иметь давление, близкое к 1 *мм рт. ст.* При $T = 10\,000$ °К число ионизированных атомов меньше 10% общего числа атомов водорода, тогда как при $T = 30\,000$ °К на $2 \cdot 10^4$ положительных ионов (протонов) приходится всего лишь один нейтральный атом.

Электронная оболочка атома водорода содержит только один электрон, и поэтому с потерей электрона ионизация заканчивается. В атомах других элементов электронная оболочка имеет более сложную структуру. В ее состав входят электроны, обладающие разной степенью связи с атомом в целом. Электроны, принадлежащие к внешним слоям оболочки, отрываются сравнительно легко. Как уже говорилось выше, при температуре порядка 30 000 °К почти не должно оставаться примеси нейтральных атомов. Это означает, что можно говорить о полной ионизации газа. Однако отсюда не следует, что процесс ионизации закончился, так как положительные ионы в упомянутой области температур сохраняют значительную часть своего «электронного одеяния».

Чем больше порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева, тем больше число электронов в атоме и тем прочнее связаны электроны внутренних слоев оболочки с атомным ядром. Поэтому окончательная ионизация атомов таких тяжелых элементов происходит только при очень высоких температурах (миллионы или даже десятки миллионов градусов). Отметим, что в тяжелом газе при окончательной ионизации на каждый положительный ион будет приходиться столько же свободных электронов, сколько их первоначально находилось в связанном состоянии в атоме. При этом газ в целом остается нейтральным, так как процессы ионизации сами по себе не создают избытка в зарядах того или другого знака.

В ионизации газа при высокой температуре принимают участие различные процессы взаимодействия между отдельными атомами, с одной стороны, и электронами, ионами и световым излучением — с другой.

Газ, в котором значительная часть атомов или молекул ионизирована, называется плазмой. Это название было предложено в 1923 году американскими физиками Ленгмюром и Тонксом. Плазма — нормальная форма существования вещества при температуре порядка 10 000 °К и выше. Вместе с тем это и наиболее распространенное состояние вещества в природных условиях. Солнце и все звезды представляют собой не что иное, как гигантские сгустки высокотемпературной плазмы. Верхний слой атмосферной оболочки Земли также образован из плазмы — это так называемая ионосфера.

Для того чтобы подойти к понятию плазмы, мы воспользовались весьма простой идеей о нагревании вещества в некотором идеальном сосуде. Однако практически это совсем не наилучший и уж, во всяком случае, не наиболее легко осуществимый метод получения плазмы. Как в лабораторных опытах, так и в технике нормальными условиями для получения плазмы считаются различные виды электрических разрядов в газах. При электрическом разряде через газ проходит ток. Носителями этого тока являются электроны и ионы, которые образуются в результате ионизации газа. Самый процесс ионизации неразрывно связан с прохождением тока. Только благодаря наличию тока в газе все время возникают новые ионы и электроны, и поэтому степень ионизации поддерживается на определенном уровне. Будь то молния, электрическая дуга, нарядно окрашенный разряд в рекламной трубке или разряд в люминесцентной лампе дневного света — во всех случаях мы имеем дело с явлениями, разыгрывающимися в сильно ионизированной плазме.

Вместе с тем между плазмой, образовавшейся при нагревании вещества заодно с сосудом, в котором оно находится, и плазмой газового разряда имеется одно существенное различие. Плазма газового разряда не является в термическом (тепловом) отношении равновесной. Она нагревается изнутри за счет энергии, выделяющейся при прохождении тока, и охлаждается с поверхности вследствие контакта с холодными стенками газоразрядного прибора или же с окружающими слоями обычного газа. Плазма, образующаяся при интенсивных газовых разрядах, может иметь во много раз более высокую температуру, чем металл, стекло или нейтральный газ, которые ее окружают. Кроме того, такая плазма термически неравновесна еще в одном отношении. Она состоит из смеси нескольких компонент, неодинаково нагретых. Одной из этих компонент являются электроны, другой — положительные ионы и третьей — нейтральные атомы. Они так же равномерно перемешаны между собой, как кислород и азот в атмосфере.

В противоположность обычной газовой смеси, все частицы которой независимо от их принадлежности к той или другой составляющей имеют одинаковую среднюю кинетическую энергию беспорядочного теплового движения, у электронов, ионов и нейтральных атомов плазмы газового разряда средняя кинетическая энергия различна. Электроны, как правило, обладают гораздо более высокими энергиями, чем ионы, а кинетическая энергия ионов может превышать энергию нейтральных атомов и молекул. Поэтому можно сказать, что плазма представляет собой смесь компонент с различными температурами. Как известно, средняя величина кинетической энергии $\overline{E}$ частиц газа, участвующих в беспорядочном тепловом движении, связана с температурой T следующей простой формулой:

$$\overline{E} = \frac{3}{2} kT, \tag{2}$$

где k — постоянная Больцмана.

Из-за различия в величине средней кинетической энергии электронов, ионов и нейтральных частиц в плазме вместо одной общей температуры следует различать три разные температуры — электронную $T_э$, ионную $T_и$ и атомную $T_а$. Обычно $T_э \gg T_и > T_а$. Очень большое различие между $T_э$ и $T_и$, характерное для большинства форм газового разряда, обусловлено громадной разницей в величине массы электронов и ионов. Внешние источники электрической энергии, с помощью которых создается и поддерживается газовый разряд, передают энергию непосредственно электронам плазмы, так как именно легкие электроны являются носителями тока. Ионы приобретают свою энергию благодаря столкновениям с быстро движущимися электронами. Однако при каждом отдельном столкновении из-за большого различия в массе легкий электрон передает иону лишь небольшую часть своей кинетической энергии, отскакивая от него, как шарик для пинг-понга, ударившийся о массивный стальной шар.

Простой анализ, основанный на применении закона сохранения энергии и закона сохранения количества движения, показывает, что если тело малой массы m_1 сталкивается упруго с телом во много раз большей массы m_2, то относительная доля кинетической энергии, которую легкое тело в состоянии передать тяжелому, не может превысить $\frac{4m_1}{m_2}$ (попробуйте доказать это сами). Отношение массы электрона к массе иона равно $1 : 1840\,A$, где A — атомный вес вещества, которому принадлежат ионы. Следовательно, наибольшая относительная величина передаваемой в одном соударении энергии составляет всего лишь около $2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{A}$. Поэтому электрон должен испытать очень много столкновений с ионами для того, чтобы полностью отдать имеющийся у него излишек энергии.

Поскольку параллельно процессам, при которых происходит обмен энергиями между электронами и ионами, идет процесс приобретения энергии электронами от источников электрического тока, питающего разряд, в плазме при газовом разряде обычно все время поддерживается большой перепад температур между электронами и ионами. Так, например, в упоминавшихся выше газоразрядных приборах (рекламные трубки, лампы дневного света, ртутные выпрямители и т. д.) величина $T_э$ обычно лежит в пределах нескольких десятков тысяч градусов, в то время как величины $T_и$ и $T_а$, как правило, не превышают одной—двух тысяч градусов. При дуговом разряде, который используется для электросварки, электронная и ионная температуры ближе друг к другу вследствие того, что в этом случае разряд происходит в газе с большей плотностью и частые столкновения между электронами и ионами быстро выравнивают разность температур. Однако и в дуговом разряде $T_э$ все же больше $T_и$ ($T_э$ порядка нескольких десятков тысяч градусов, а $T_и$ и $T_а$ порядка 6000 °K).

При некоторых специальных условиях в сильно ионизированной плазме ионная температура может значительно превысить электронную. Такие условия возникают, например, при кратковременных электрических разрядах очень большой мощности в экспериментальных установках, предназначенных для исследования способов генерации так называемых управляемых термоядерных реакций.

Теперь несколько уточним общие представления о плазме и ее основных характеристиках. Плазма, то есть ионизированный газ, может обладать довольно сложным составом. Даже в том случае, если плазма образуется в результате ионизации химически простого газа, например азота, кислорода или паров ртути, ее ионная компонента будет содержать ионы различных сортов — с одним, двумя, тремя или более элементарными зарядами. Следует отметить, что кроме атомарных ионов могут присутствовать молекулярные ионы, а также нейтральные атомы и молекулы. Каждая из этих компонент будет характеризоваться своей концентрацией n и температурой T.

В простейшем случае, когда все ионы — однозарядные атомарные ионы, а нейтральная компонента полностью диссоциирована и состоит только из атомов, в плазме будут присутствовать всего три компоненты: электроны, ионы и нейтральные атомы. Такие условия создаются только при интенсивных разрядах в водороде, дейтерии или тритии. В приведенном примере концентрация ионов $n_и$ приблизительно равна концентрации электронов $n_э$. В более общем случае, когда в плазме присутствуют однозарядные ионы с концентрацией n_1, двухзарядные — с концентрацией n_2, трехзарядные — с концентрацией n_3 и т. д., можно записать следующее приблизительное равенство:

$$n_э = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots$$

Такое соотношение между концентрацией отрицательных и положительных зарядов в плазме говорит о том, что плазма в целом квазинейтральна, то есть в ней нет заметного избытка зарядов одного знака над зарядами другого знака.

На этом свойстве плазмы нужно остановиться несколько подробнее, так как оно имеет существенное значение и, в конечном счете, в нем содержится самое определение понятия «плазма».

Возникает естественный вопрос: с какой степенью точности в ионизированном газе должно соблюдаться условие квазинейтральности? Каким бы путем ни создавалась ионизация, заранее совсем не очевидно, что положительных и отрицательных зарядов должно быть поровну. Из-за различия в скоростях движения электронов и ионов первые могут с большей легкостью покидать объем, в котором они возникли. Поэтому если благодаря процессам ионизации атомов первоначально образуется одинаковое число зарядов противоположных знаков, то из-за быстрого исчезновения электронов, погибающих на стенках аппаратуры, внутри которой находится ионизированный газ, ионы, казалось бы, должны оставаться в значительно большем числе, то есть ни о какой квазинейтральности не должно быть и речи.

С другой стороны, нужно учесть, что при преимущественной утечке зарядов одного знака (электронов) в ионизированном газе немедленно образуется избыточный заряд другого знака, который способствует выравниванию потока электронов и ионов и препятствует увеличению разницы между концентрациями частиц обоих знаков. Условия, при которых этот эффект будет достаточен для того, чтобы поддерживать квазинейтральность, можно разъяснить с помощью следующих соображений.

Допустим для простоты, что в ионизированном газе присутствуют кроме электронов только однозарядные ионы. Квазинейтральность означает, что $n_э$ очень мало отличается от $n_и$. Как отразится на поведении отдельных частиц заметное отклонение $n_э$ от $n_и$? Очевидно, что все будет зависеть от того, насколько сильным окажется обратное влияние электрического поля, возникающего при таком отклонении, на движение заряженных частиц. Здесь сразу же выделяются два крайних случая. Если число заряженных частиц в объеме невелико, то создаваемые ими электрические поля слишком слабы для того, чтобы повлиять на их движение, даже если все поля складываются. В этом случае отдельные электроны и ионы в своем поведении никак не связаны друг с другом и каждая из частиц двигается так, как будто бы все другие отсутствуют. Следовательно, условие квазинейтральности здесь не обязано выполняться. Противоположный случай соответствует ионизированному газу с высокой концентрацией заряженных частиц, занимающему достаточно большой объем. В этом случае избыточные заряды, возникающие при сильном нарушении равенства между $n_э$ и $n_и$, создают электрические поля, достаточные для выравнивания потоков и восстановления квазинейтральности.

В конечном счете все зависит от соотношения между потенциальной энергией отдельного иона или электрона в электрическом поле, возникающем при нарушении квазинейтральности, и величиной средней кинетической энергии частиц, связанной с их тепловым движением. Если потенциальная энергия $W_п$, соответствующая заметному отклонению $n_э$ от $n_и$, будет значительно превышать величину $kT_э$, которая является мерой энергии теплового движения электронов, то условие квазинейтральности будет соблюдаться с достаточно хорошей точностью. Анализируя соотношение между $W_п$ и $kT_э$ более детально, можно прийти к простому количественному критерию, характеризующему условия, при которых квазинейтральность сохраняется:

$$r \gg 5\sqrt{\frac{T_э}{n_э}}. \qquad (3)$$

В этом соотношении $n_э$ — концентрация заряженных частиц (число электронов в единице объема) и r — линейный размер области, занятой ионизированным газом, например, радиус сферической колбы, в которой этот газ находится. Появление величины r в данном выражении нетрудно разъяснить. При заданной концентрации заряженных частиц создаваемый ими потенциал, а следовательно, и потенциальная энергия отдельной частицы зависят от размеров области, в которой находятся эти частицы. Поэтому величина, характеризующая данный размер, должна обязательно входить в формулу, выражающую условие квазинейтральности. Величина $5\sqrt{\frac{T_э}{n_э}} = r_Д$ носит название дебаевского радиуса по имени немецкого физика Дебая.

Согласно условию (3), если размеры области, занимаемой ионизированным газом с заданной концентрацией $n_э$ и электронной температурой $T_э$, значительно превосходят $r_Д$, то внутри этой области $n_э \approx n_и$. В этом случае при сильном отклонении $n_э$ от $n_и$ образующееся электрическое поле будет выталкивать частицы одного знака (присутствующие в избытке) и задерживать уход частиц другого знака. Такой механизм, автоматически поддерживающий равенство $n_э$ и $n_и$, перестает действовать в случае, когда $r \ll r_Д$. В объемах с линейными размерами, значительно меньшими, чем $r_Д$, электрические поля, возникающие при отклонении $n_э$ от $n_и$, будут слишком малы, чтобы оказать заметное влияние на движение отдельных частиц.

Теперь можно вложить более определенный смысл в понятие «плазма». До той поры, пока мы имеем дело с относительно небольшим числом заряженных частиц, которые не в состоянии создать достаточно сильное поле для того, чтобы оно могло существенно сказаться на поведении каждой из частиц, не имеет смысла говорить о наличии какого-то нового состояния вещества. Новая форма вещества — плазма — соответствует такому состоянию, когда число электронов и ионов настолько велико, что даже небольшое смещение электронной компоненты по отношению к ионной оказывается невозможным из-за сильных электрических полей, возникающих при нарушении равенства между $n_э$ и $n_и$. Таким образом, ионизированный газ имеет право называться плазмой только в том случае, если условие (3) выполнено с достаточным запасом.

Нужно подчеркнуть, что квазинейтральность плазмы соблюдается только в пределах достаточно больших объемов. Если выделить внутри плазмы куб со стороной x, значительно меньшей, чем $r_Д$, то в пределах этого куба число ионов может значительно отличаться от числа электронов. Чем меньше отношение $x/r_Д$, тем больше может быть различие между величиной отношения $n_э/n_и$ и единицей.

Как появился знак корня

Извлечение корня обозначается знаком $\sqrt{\ }$. Не все знают, что это — видоизменение латинской буквы r, первой в латинском слове «rādix», означающем «корень». В XVI веке знаком корня служила не строчная, а прописная буква R, а рядом с нею ставилась первая буква латинских слов «quadrātus» — «квадратный» (q) или «cŭbĭcus» — «кубический» (c), чтобы указать, какой именно корень требуется извлечь. Например, писали $R \cdot q \cdot 4352$ вместо нынешнего $\sqrt{4352}$.

Найти число

1. Найти трехзначное число, которое, будучи прочитано справа налево, сохраняет свое значение, если считать, что в этом случае оно изображено в девятиричной системе счисления.

2. 3, 5, 7 — три последовательных нечетных простых числа. Имеются ли в натуральном ряде чисел еще три последовательных нечетных простых числа?

3. Найти четырехзначное число, равное квадрату числа, образованного двумя последними цифрами этого числа.

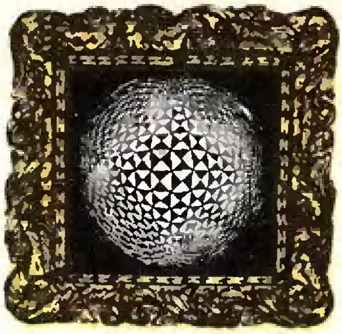
4. Найти двухзначное число, квадрат которого равен кубу суммы его цифр.

5. Найти четырехзначное число, равное 4-й степени суммы его цифр.

6. Найти число, являющееся точным квадратом, если известно, что в пятиричной системе оно оказывается числом четырехзначным, а если его записать в семиричной системе, то оно изображается одинаковыми цифрами.

А. П. САВИН

ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ



Рисунки и планы

Недавно, перелистывая учебник природоведения для 3-го класса, я обратил внимание на две картинки: класс, нарисованный художником (рис. 1), и план того же класса (рис. 2). Взгляните на них. Класс на рисунке 1 изображен таким, каким вы его видите, стоя у доски. А план? Таким вы свой класс наверняка не видели, даже забравшись на стул, поставленный на парты.

Однако сделать хороший рисунок класса, комнаты, двора — задача гораздо более трудная, чем нарисовать соответствующий план. Действительно, чтобы нарисовать план, достаточно набраться терпения и измерить размеры предметов и расстояния между ними, а затем в соответствующем масштабе перенести на лист бумаги. Задача, вполне посильная любому третьекласснику.

А рисунок? «Для этого нужен талант», — скажете вы. Что ж, несомненно, Галя Мисевич из Киева — талантливая девочка, рисунок, сделанный ею в семилетнем возрасте (рис. 3), украшал обложку журнала «Мурзилка». Однако что-то в нем не так. В нем... отсутствует перспектива! Та самая перспектива, которая придает объемность плоскому изображению.

Впервые правильным изображением перспективы серьезно заинтересовались художники эпохи Возрождения, в особенности Альбрехт Дюрер (1471—1528) и Леонардо да Винчи (1452—1519). Затем к решению этой задачи приступили математики и создали красивую науку — проективную геометрию, ее основы были заложены Жераром Дезаргом (1593—1661) и Блезом Паскалем (1623—1662).

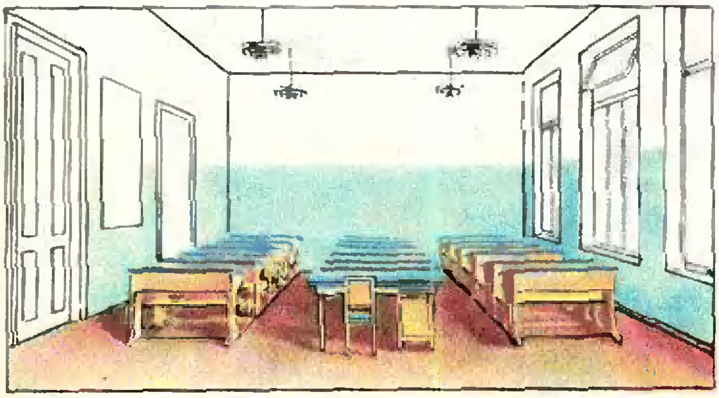


Рис. 1.

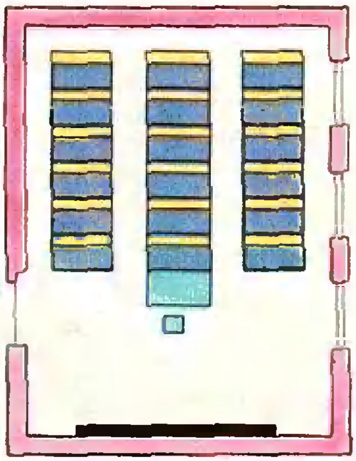


Рис. 2.

Рис. 3.

Взгляните в окно. Вы увидите пейзаж. А теперь представьте себе, что это не окно, а картина. «Автору» этой картины, очевидно, невозможно поставить в упрек плохую перспективу. Попробуем повторить эту картину, например, мелом прямо на оконном стекле. Встанем и пойдем к окну. И тут же «картина» начнет изменяться — на ней появятся новые предметы, а те, которые были прежде, станут перемещаться и менять свою форму. Однако дойдем до окна и попытаемся изобразить то, что мы видим. Нас ждет неудача: малейшее движение головой, и картина меняется, изображения передвигаются на другие места. Что же делать?

Взгляните на гравюру А. Дюрера (рис. 4). С помощью остроумного приспособления художник рисует вазу так, как она видна из точки, в которой веревка прикреплена к стене. Пользуясь этим инструментом и вы сможете правильно изобразить перспективу пейзажа в вашем окне. Однако не думайте, что вы уже стали художником. Еще точнее эту картину воспроизведет фотоаппарат, а для того, чтобы картина стала действительно художественным произведением, нужен талант.

Но оставим на время живопись и перейдем к геометрии. Рассмотрим схему метода Дюрера (рис. 5). Зададим в пространстве плоскость P и точку O. Для того чтобы построить изображение точки N на плоскости P, проведем прямую через точки N и O. Точка N_1, в которой эта прямая пересечет плоскость P, и будет изображением точки N на плоскости P. Такой метод построения изображения называется *центральной проекцией на плоскость P из точки O*.

Рассмотрим центральную проекцию из некоторой точки O фигур, ле-

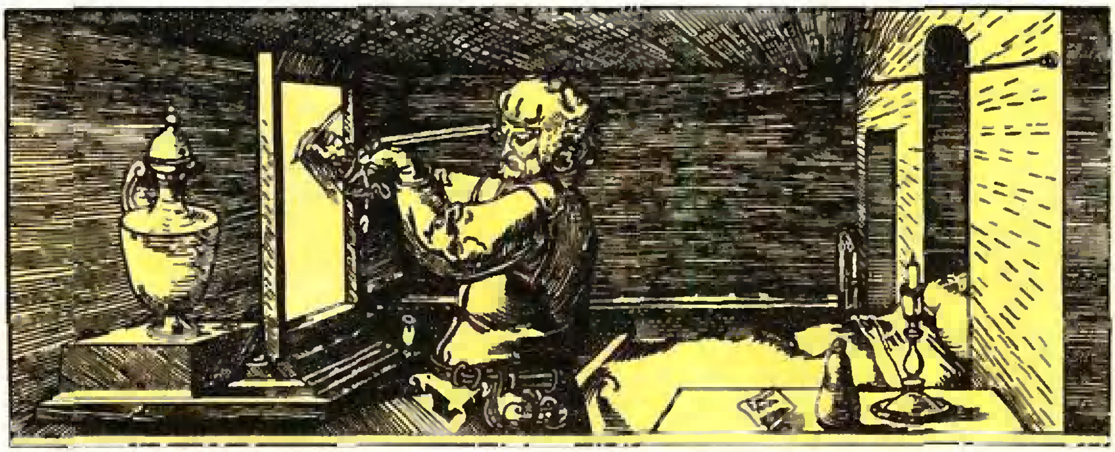


Рис. 4.

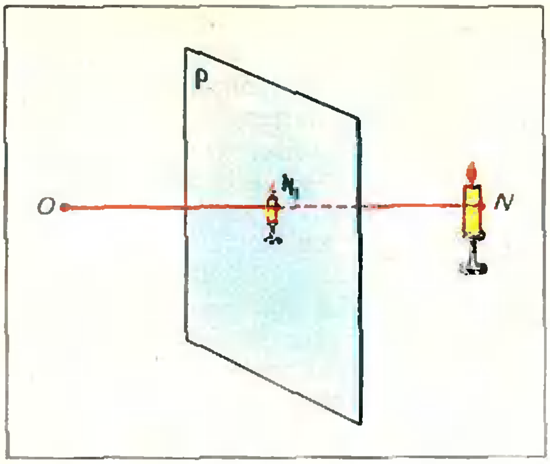


Рис. 5.

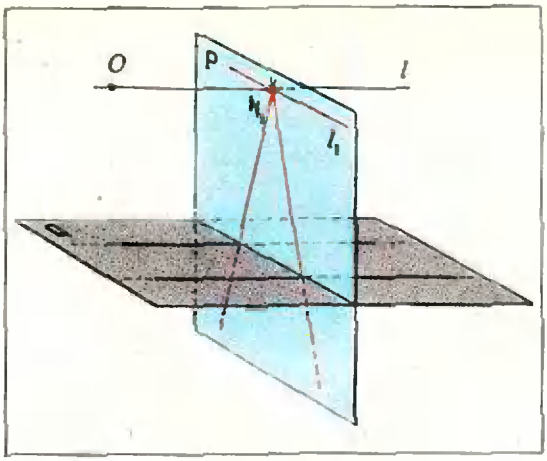


Рис. 7.

жащих в горизонтальной плоскости Q, на вертикальную плоскость P (рис. 6). Заметим, что при этом прямые будут переходить в прямые. Действительно, проведем плоскость через прямую на плоскости Q и точку O. Линия ее пересечения с плоскостью P и будет изображением выбранной прямой. Ясно, что если две прямые пересекаются (не на прямой l_2, см. далее рис. 8), то их изображения тоже пересекаются. Могут пересекаться даже изображения параллельных прямых (рис. 7), причем точка N_1 пересечения этих прямых лежит на прямой l, проходящей через точку O и параллельной плоскости Q (так «пересекаются» на горизонте рельсы железной дороги).

А какой прямой на плоскости Q соответствует «горизонтальная» прямая l_1 на плоскости P — «линия горизонта»? Такой прямой нет. В то же время для любой другой прямой плоскости P найдется прямая на плоскости Q, которая ей соответствует (проверьте). С другой стороны, для прямой l_2 пересечения плоскости Q с плоскостью R (R параллельна плоскости P и проходит через точку O, см. рис. 8) и только для этой прямой не найдется изображения на плоскости P ни для одной из ее точек, да и образы прямых, параллельных l_2 и лежащих в Q, на P не пересекаются. Стремление устранить такую «дискриминацию» привело к созданию понятия проективной плоскости.

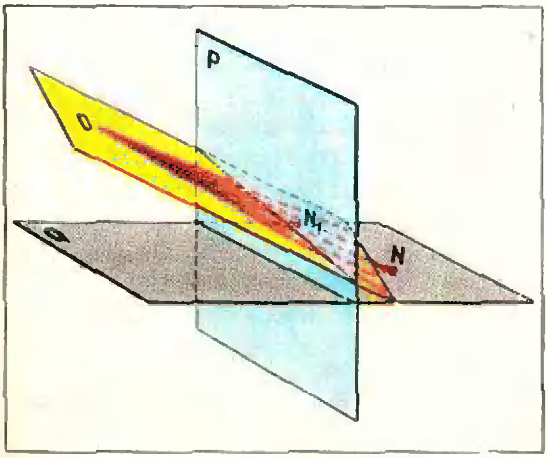


Рис. 6.

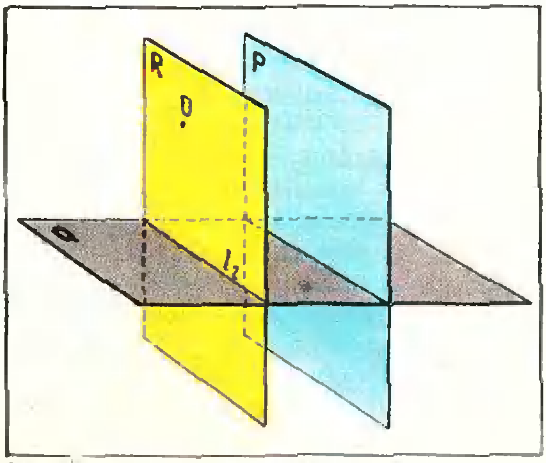


Рис. 8.

Проективная плоскость

Мысленно дополним обычную плоскость точками еще одной «прямой», которую будем называть *бесконечно удаленной* (ее точки также будем называть *бесконечно удаленными*). Свяжем элементы плоскости с вновь введенными элементами.

Во-первых, будем считать, что любая прямая плоскости пересекается с бесконечно удаленной прямой и притом в единственной точке (эта точка, естественно, будет бесконечно удаленной, поскольку она принадлежит бесконечно удаленной прямой).

Во-вторых, будем считать, что любая прямая, параллельная данной, пересекается с бесконечно удаленной прямой в той же точке, что и данная. Тогда эта точка является точкой пересечения всех прямых, параллельных данной (в смысле параллельности на обычной плоскости).

Теперь при центральном проектировании прямую l_1 можно считать образом «бесконечно удаленной прямой» плоскости Q, а образом прямой l_2 — «бесконечно удаленную прямую» плоскости P, при этом лишь для точки пересечения «бесконечно удаленной прямой» плоскости Q с прямой l_2 не найдется места на прямой l_1, то есть эта точка останется «бесконечно удаленной» (и аналогично для «бесконечно удаленной прямой» плоскости P и прямой l_1).

Каковы же свойства полученной проективной плоскости? А это зависит от того, с какой точки зрения их рассматривать. Наиболее естественно рассматривать те свойства проективной плоскости, которые не меняются при центральном проектировании. Действительно, при этом стирается разница между прямыми на первоначальной плоскости и бесконечно удаленной прямой, поскольку свойства бесконечно удаленной прямой плоскости Q будут в таком случае полностью соответствовать свойствам прямой l_1 плоскости P.

Перечислим основные из этих свойств:

1) *Для любых двух точек существует одна и только одна прямая, которой они одновременно принадлежат.*

2) *Любые две прямые пересекаются в одной и только в одной точке.*

При этом придется забыть и об углах между прямыми, поскольку их величины не сохраняются при центральном проектировании, и о расстояниях между точками. Кажется, что это обстоятельство обедняет геометрию проективной плоскости. Тем не менее получается большая и содержательная теория, которая носит название *проективной геометрии* и отличается чрезвычайным изяществом своих теорем. Вот одна из них.

Теорема Дезарга. *Пусть даны три прямые, пересекающиеся в точке O. Пусть на одной прямой лежат точки A и A_1, на другой — B и B_1, на третьей C и C_1. Тогда точки пересечения прямых AB и A_1B_1,*

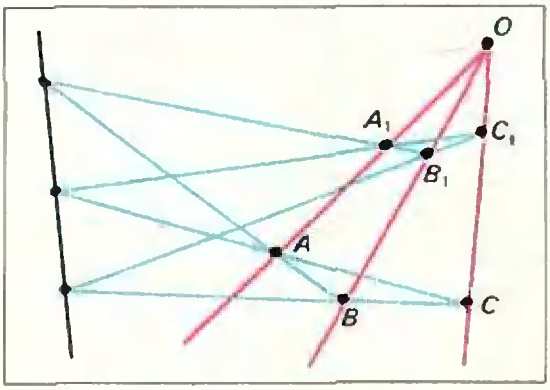


Рис. 9.

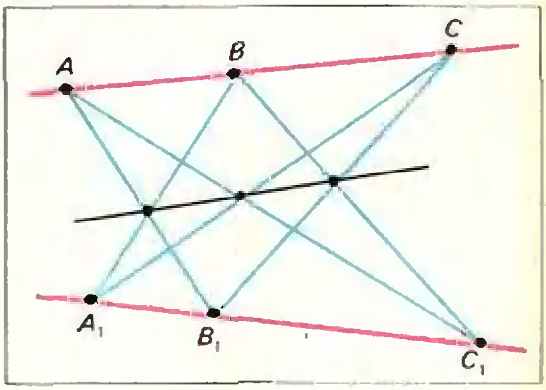


Рис. 10.

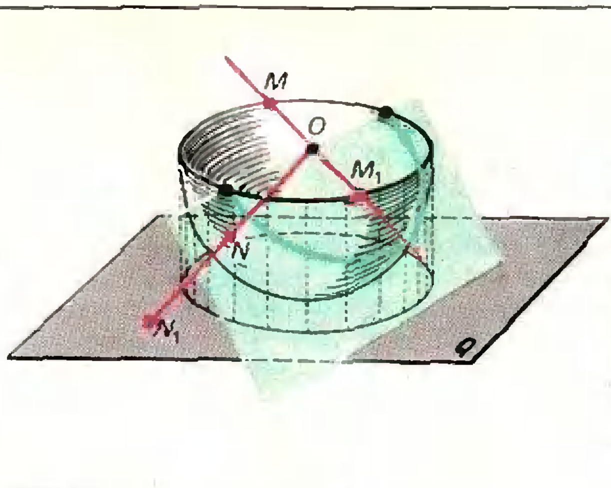


Рис. 11.

Рис. 12.

AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 лежат на одной прямой (рис. 9).

На обычной плоскости в этой теореме приходится отдельно оговаривать ряд случаев, когда какие-либо прямые параллельны. А вот еще одна теорема.

Теорема Паппа. *Пусть на одной прямой даны точки A, B и C, а на другой — точки A_1, B_1 и C_1, тогда точки пересечения прямых AB_1 и A_1B, AC_1 и A_1C, BC_1 и B_1C лежат на одной прямой* (рис. 10).

И эта теорема на обычной плоскости нуждается в уточнениях в случае параллельности тех или иных прямых.

Одним из самых замечательных свойств проективной геометрии является «принцип двойственности»: *на проективной плоскости каждая теорема остается справедливой, если в ней всюду слово «точка» заменить на слово «прямая», слово «прямая» на слово «точка» и поменять местами выражения: «лежит на...» и «проходит через...».* Примером такой двойственности могут служить указанные выше свойства проективной плоскости.

Упражнение

Сформулируйте теоремы, двойственные теоремам Дезарга и Паппа.

Тем, кого заинтересовала проективная геометрия, рекомендуем прочитать книги, указанные в конце статьи. А сейчас вернемся к самой проективной плоскости, как к геометрическому объекту.

Модели проективной плоскости

Мы получили проективную плоскость, введя «бесконечно удаленные точки» и «бесконечно удаленную прямую». Можно ли посмотреть, что же из этого получилось? «Бесконечно удаленную прямую» (без одной точки) мы увидели, когда спроектировали проективную плоскость Q на плоскость P. Но при этом «ушли на бесконечность» другие ее точки — прямая l_2. Хотелось бы получить такую модель проективной плоскости, в которой были бы «видны» все ее точки.

Одна такая модель уже почти построена. А именно, зафиксируем точку O в пространстве и назовем «точками» прямые, проходящие через точку O, а «прямыми» — плоскости, проходящие через точку O. Посмотрите еще раз на рисунки 6—8. Каждой точке проективной плоскости действительно соответствует единственная «точка» модели — прямая, проходящая через эту точку и точку O, а каждой прямой — «прямая» — плоскость, проходящая через эту прямую и точку O. При этом бесконечно уда-

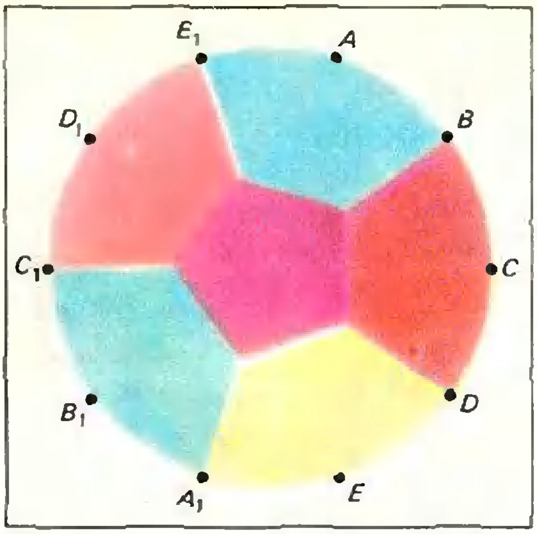


Рис. 13.

ленной прямой будет соответствовать горизонтальная плоскость — «прямая», а бесконечно удаленным точкам — лежащие в горизонтальной плоскости прямые (например, ON_1 на рисунке 7) — «точки». В этой модели наиболее ярко видно равноправие всех точек и прямых проективной плоскости.

Полученная модель очень хороша для исследования свойств проективной плоскости, однако хотелось бы иметь такую модель, в которой точки были бы точками, а прямые — линиями. Оказывается, такую модель нетрудно получить из предыдущей. Добавим еще полусферу с центром в точке O, касающуюся плоскости Q (основание полусферы параллельно плоскости Q). Тогда каждой прямой, соединяющей точку O с точкой на плоскости Q, будет соответствовать точка на полусфере — та самая, в которой эта прямая пересекается с полусферой. Прямым обычной плоскости при этом будут соответствовать полуокружности на полусфере, проходящие через диаметрально противоположные точки границы полусферы. Семейству параллельных прямых на плоскости Q будут соответствовать две диаметрально противоположные точки на границе полусферы (рис. 11), а бесконечно удаленной прямой — граница полусферы.

К сожалению, каждой «бесконечно удаленной точке» (точке «бесконечно удаленной прямой») соответствуют две диаметрально противоположные точки границы полусферы. Чтобы избавиться от этого недостатка модели, надо лишь склеить между собой две полуокружности границы полусферы, но так, чтобы при этом склеивались диаметрально противоположные точки. Это сделать, оказывается, совсем не просто. Мало того, что полусферу придется изгибать, придется еще и разрешить ей пересекать саму себя. То, что получится в результате, можно увидеть на рисунке 12 — поверхность сама себя пересекает по линии AB.

В этой модели, естественно, уже трудно хорошо изобразить прямые. Поэтому чаще всего пользуются другой моделью: круг, диаметрально противоположные точки которого мысленно считаются склеенными. Такая модель получается из модели на полусфере (рис. 11), если эту полусферу спроектировать на плоскость Q.

На проективной плоскости можно нарисовать шесть стран, каждые две из которых граничат друг с другом (рис. 13). Заметим, что на обычной плоскости таких стран может быть не больше четырех. Было доказано, что шести красок достаточно для правильной раскраски любой карты на проективной плоскости (раскраска называется правильной, если любые две страны, имеющие общую границу, раскрашены в разные цвета), а для обычной плоскости до сих пор не найдено карты, для правильной раскраски которой не хватило бы четырех красок, но и не доказано, что любую карту можно правильно раскрасить четырьмя красками.

Литература

1. П. С. Александров, Лекции по аналитической геометрии, «Наука», М., 1968.

2. Дж. В. Юнг. Проективная геометрия, ИЛ, М., 1949.

3. Г. С. М. Коксте р. Введение в геометрию, «Наука», М., 1966.

Е. Я. ГИК

ПРОЕКТИВНЫЕ ШАХМАТЫ

На страницах «Кванта» уже рассказывалось о том, как играть в шахматы на различных досках, получающихся при помощи геометрических преобразований из обычной шахматной доски. Именно таким способом возникают, например, цилиндрические и тороидальные шахматы *). Сейчас мы познакомимся с шахматной игрой еще на одной необычной доске. В основе этой игры лежат элементы проективной геометрии, поэтому шахматы называются проективными.

Проективная плоскость

О ней рассказано в этом номере журнала в статье А. П. Савина (см. с. 9). Коротко повторим: к обычной плоскости добавляется некоторое множество дополнительных точек. Каждая из этих точек соответствует семейству параллельных прямых плоскости и называется *бесконечно удаленной* точкой проективной плоскости. Параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке. Различным множествам параллельных прямых соответствуют различные бесконечно удаленные точки — в каждом направлении имеется своя точка. Совокупность всех бесконечно удаленных точек объявляется «прямой», она называется *бесконечно удаленной прямой* проективной плоскости. Точки и прямые исходной плоскости называются *конечными*.

Итак, на проективной плоскости всякие две прямые обязательно пересекаются, причем в единственной точке: конечной, если на обычной плоскости они не параллельны, и в бесконечно удаленной, если параллельны. Если же одна из прямых бесконечно удаленная, то она пересекается со второй прямой в бесконечно удаленной точке.

Проективная шахматная доска

Расширяя раскраску обычной шахматной доски на всю бесконечную плоскость, мы получаем клетчатую черно-белую плоскость, которую будем называть *бесконечной шахматной доской* Ш. Естественным образом введем на ней декартову систему

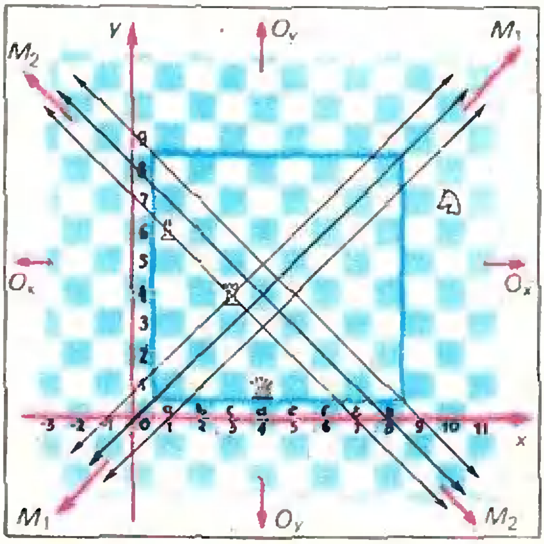


Рис. 1.

*) См. «Квант», 1970, № 5 и 1971, № 8.

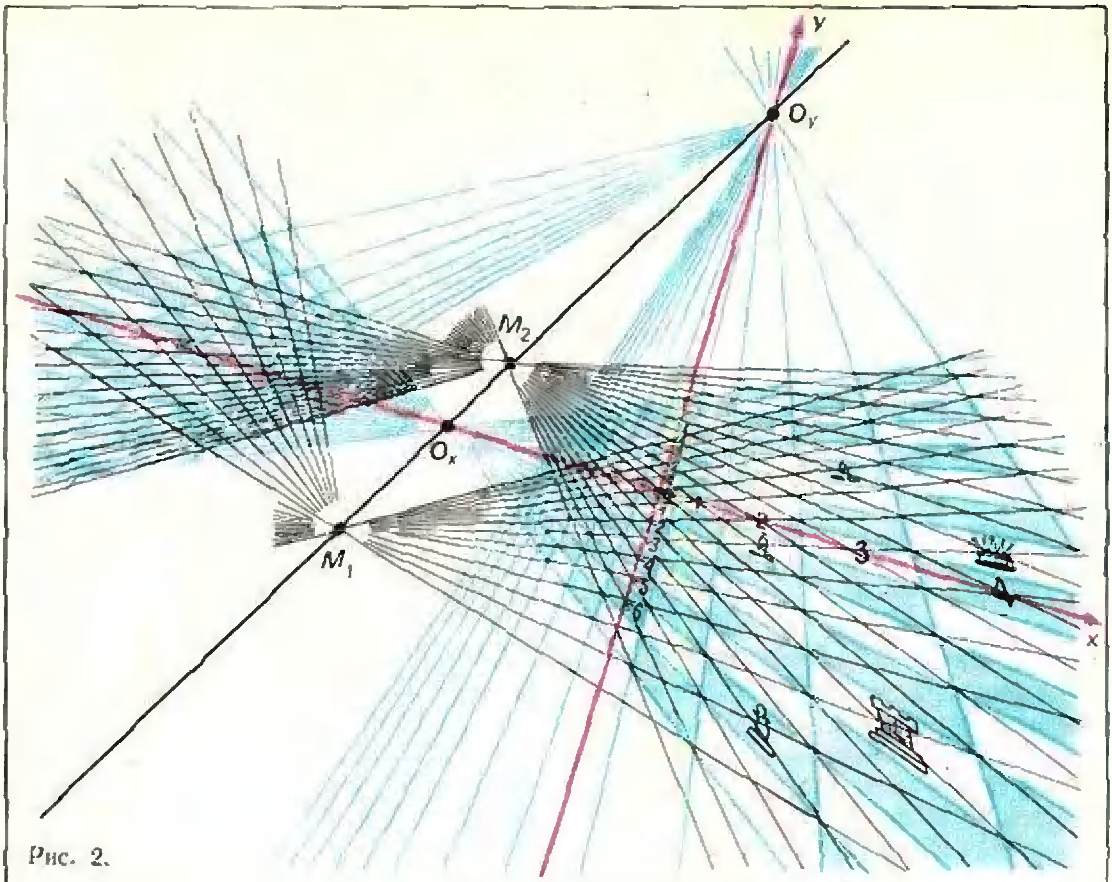


Рис. 2.

координат xOy (см. рис. 1). При этом каждое поле доски Ш обозначается парой чисел (x, y) — абсциссой и ординатой центра этого поля. Например, конь на рисунке 1 стоит на поле (10,7). Конечно, если события «протекают» в пределах обычной шахматной доски (на рисунке 1 она выделена), то можно пользоваться и шахматной нотацией. Так, поле (1,6), на котором находится пешка, есть просто а6.

Теперь добавим к доске Ш четыре бесконечно удаленных поля: поле O_x, в котором пересекаются все горизонтали, поле O_y — в котором пересекаются все вертикали, и два поля M_1 и M_2, в которых пересекаются соответственно два множества диагоналей (рис. 1).

Доску Ш, дополненную бесконечно удаленными полями O_x, O_y, M_1 и M_2, назовем проективной шахматной доской П. Аналогия между рассмотренной выше проективной плоскостью и полученной доской П очевидна. Вместо точек проективной плоскости (конечных и бесконечно удаленных) здесь мы имеем дело с полями доски П (соответственно конечными или бесконечно удаленными). Поскольку «шахматными» направлениями являются только горизонтали, вертикали и диагонали, то мы ограничиваемся лишь четырьмя направлениями в плоскости, а значит и четырьмя бесконечно удаленными полями. Можно считать, что эти поля лежат на бесконечно удаленной прямой доски Ш.

Заметим, что если фигура непрерывно движется вдоль произвольной линии в заданном направлении, то она пройдет при этом бесконечно удаленное поле, а затем вернется в исходное положение, то есть всякая линия на доске П как бы замкнута. Это связано с тем, что в проективной плоскости каждому множеству параллельных прямых, независимо от их ориентации, соответствует ровно одна бесконечно удаленная точка. Это также изображено на рисунке 1.

На рисунке 2 доска П изображена довольно оригинальным способом. Здесь бесконечно удаленная прямая как бы спроектирована на доску Ш. Правда, для этого все поля Ш пришлось «поджать». Представьте себе путника, стоящего на шоссе, взгляд которого устремлен далеко вперед. Ему кажется, что края дороги где-то обязательно пересекаются. Рисунок 2 можно рассматривать как графическую иллюстрацию этой иллюзии. Мы видим поля O_x, O_y, M_1, M_2, а также проходящие через них горизонтали, вертикали и диагонали (двух направлений).

С каждого конечного поля ладья или ферзь могут попасть на поля O_x или O_y, двигаясь в любом из двух противоположных направлений. Например, ладья с поля (3,4) (см. рис. 1) попадает на поле O_x, проходя через поля (2,4) или (4,4).

С каждого конечного поля слон или ферзь могут попасть на поля M_1 или M_2, также двигаясь по любому из двух противоположных направлений. Так, ферзь с поля (4,1) (см. рис. 1) попадает на поле M_2, проходя через поля (3,2) или (5,0).

Остальные шахматные фигуры (король, конь и пешка), которые не могут линейно перемещаться на любое число полей, никогда не попадают на поля O_x, O_y, M_1, M_2. Эти фигуры всегда остаются на доске Ш.

Правила игры

Итак, доска П для игры в проективные шахматы у нас уже есть. Осталось определить правила движения фигур на ней.

1. *Основные правила обычных шахмат (способ выполнения ходов, шах, мат, пат и т. д.) сохраняются и на доске П.*

2. *На доске Ш фигуры ходят как и в обычных шахматах.*

3. *Дальнобойная фигура может за один ход переместиться на бесконечно удаленное поле по любому из двух противоположных направлений. Однако вернуться обратно она может лишь следующим ходом. При этом слон, отправляясь в «бесконечность», не забывает своего цвета, хотя сами бесконечно удаленные поля мы считаем бесцветными.*

4. *С бесконечно удаленного поля дальнобойная фигура может вернуться на конечное поле по любому из двух противоположных направлений (с учетом ее способа передвижения).*

Например, белопольный слон с поля M_2 может попасть на белое поле (2,1) только по белым диагоналям через поля (3,0) или (1,2).

Ферзь может пойти с полей M_1 или M_2 на любое конечное белое или черное поле, двигаясь по диагоналям, проходящим через него. Так, с M_1 он попадает по белой диагонали на поле (4,1) через поля (3,0) или (5,2).

5. *Фигура, находящаяся на бесконечно удаленном поле, по полям своего действия (в двух направлениях) угрожает фигуре противника, стоящей на конечном поле. Наоборот, если с конечного поля фигура по полям своего действия может пойти на бесконечно удаленное поле, то она угрожает стоящей там фигуре противника.*

Например, ладья с поля O_y угрожает пешке (2, —6) по вертикали, проходящей через поле (2, —5), а также в противоположном направлении— через поле (2, —7). Чернопольный слон с поля (3,3) нападает на неприятельскую фигуру, стоящую на поле M_1 по черной диагонали в двух направлениях: через поля (2,2) и (4,4).

6. *Фигура, стоящая на бесконечно удаленном поле, может взять фигуру противника, стоящую на конечном поле, если она угрожает ей по полям своего действия (хотя бы по одному из направлений). Аналогично, с конечного поля фигура может взять неприя-*

тельскую, стоящую на бесконечно удаленном поле.

7. На каждом бесконечно удаленном поле не могут находиться одновременно две фигуры.

8. С одного бесконечно удаленного поля на другое ходить нельзя (перемещение по бесконечно удаленной прямой запрещено).

9. Пешка не может делать двойной ход или превращаться в другую фигуру.

Впрочем, если разработать «начальную позицию», то это правило можно модифицировать в соответствии с обычными шахматами.

Таким образом, правила игры в проективные шахматы построены на основе строгих геометрических рассуждений. Любопытно, что абстрактные геометрические понятия находят в данном случае практическое применение.

Шахматно-проективные задачи

В проективных шахматах открываются богатые и неожиданные возможности по сравнению с обычной игрой. Расширение площади «сражения» фактически ведет к изменению силы фигур. При этом возникают новые оригинальные идеи. Не случайно шахматные композиторы в своих изысканиях часто прибегают к проективным шахматам. Особой популярностью они пользуются в Югославии *).

В начальной позиции шахматно-проективной задачи фигуры, как правило, располагаются внутри обычной доски 8×8. При этом ее рисуют без краев как фрагмент доски Ш. Это означает, что решение следует искать на шахматно-проективной доске П.

Сейчас мы разберем две шахматно-проективные задачи. Все варианты в них мы будем записывать в обычной шахматной нотации.

*) В частности, в основе настоящей статьи лежат материалы, опубликованные югославским проблемистом и инженером Н. Петровичем в различных номерах югославского журнала «Problem».

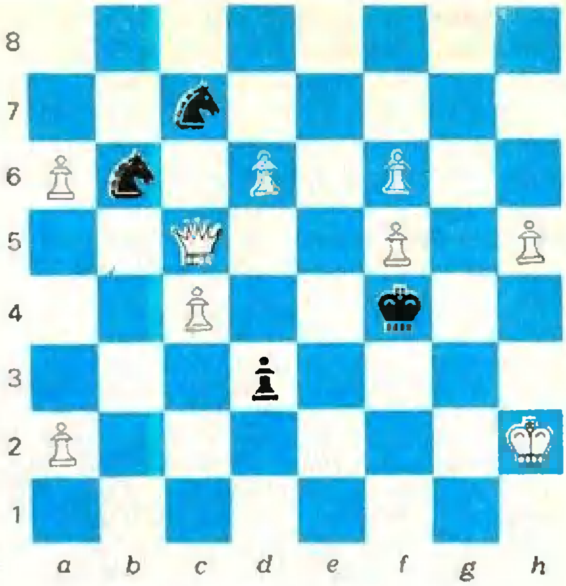


Рис. 3. Мат в два хода

1. Крh 2—g1! Теперь у черных несколько возможностей, рассмотрим каждую из них в отдельности.

Если на любое поле уходит конь с поля b6, что обозначается 1 . . . . . . Kb6∼, то матует 2. Фc5 — a7 — — M_2 (здесь и далее промежуточное поле указывает направление, в котором фигура отправляется в бесконечность). С поля M_2 ферзь нападает на черного короля и, кроме того, дер-

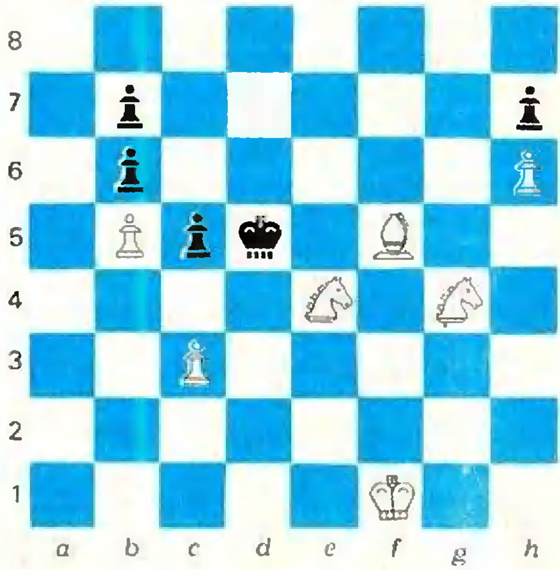


Рис. 4. Мат в три хода

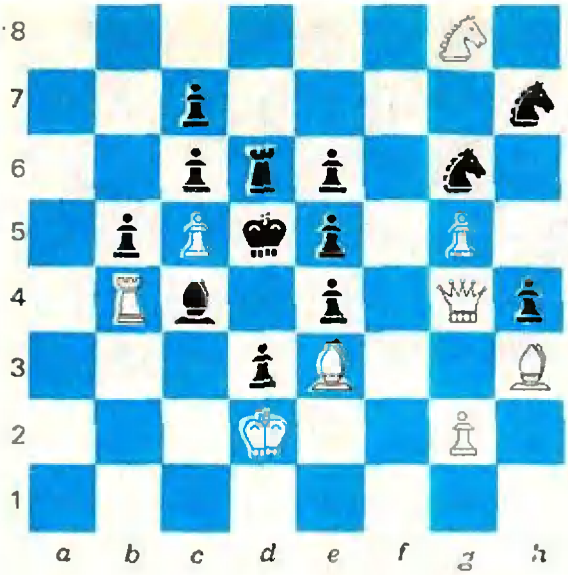


Рис. 5. Мат в два хода

жит все поля вокруг него: e3 через a7, f3 и e4 — через h1, g4 и f5 — через h3, g5 — через h4, а g3 и e5 — через h2 (это поле на первом ходу освободил белый король).

Если уходит другой черный конь — 1 . . . Кс7~, то матует 2. Фс5 — с8 — — O_y. Если вперед идет пешка d — 1 . . . d3 — d2, или черный король переходит на линию g — 1 . . . . . . Крf4 — g3 (g4, g5), то следует 2. Фс5 — а3 — M_1 мат. В исходной

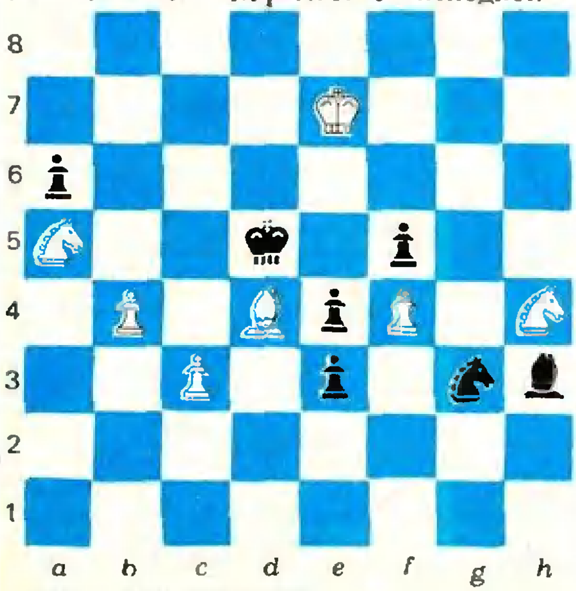


Рис. 6. Мат в три хода

позиции этот ход не матует, так как у короля находится пристанище на е4 (пешки d3 и f5 защищают его от ферзя). Наконец, на отход короля 1 . . . Крf4 — е4 (f3) следует 2. Фс5 — а5 — O_x мат (на первом ходу это тоже только шах, так как черный король скрывается на g5).

Разумеется, в задаче-двухходовке первый ход должен быть единственным, иначе она обесценивается. Убедимся, что в нашем случае других решений нет. На 1.Крh2 — h3 с угрозой мата 2. Фс5 — M_2 у черных находится защита 1 . . . Кb6 — d7!

Теперь на 2. Фс5 — M_2 шах следует 2 . . . Крf4 : f5!, и черный король скрывается от ферзя, в чем ему помогает король противника, стоящий на h3. Убедитесь сами, что не достигается цель и при других вступительных ходах белых, которые мы ниже приводим вместе с необходимыми возражениями (в краткой нотации).

1. Крg2 (h1) Кbd5! 2. Ф — M_2шах Кре4!; 1. Крi3 (вертикаль i следует за h) Крf3!; 1. Ф : b6 Кре4!; 1. Фd4 шах Крf3!; 1. Ф — M_1 шах Кре4!; 1. Ф — O_x шах Крg5! 1. Ф: : с7 Кре3!

Рассмотрим вторую задачу (рис.4). 1. Сf5 — с8 — M_2. У черных два ответа: пойти на с4 либо пешкой, либо королем.

1 . . . с5 — с4 2. Крf1 — g2! Крd5 : е4 (на предыдущем ходу конь через поле h1 был защищен слоном с M_2), и после 3. Крf3 — g3 вскрытый мат дает слон!

1 . . . Крd5 — с4 2. Кg4 — е3 шах Крс4 — d3 (поля b3 и b5 под обстрелом держит слон с M_2). 3. Крf1 — f2 мат! Вновь сделал свое дело находящийся в бесконечности слон!

Предлагаем вам самим проявить изобретательность на шахматно-проективной доске и придумать несколько задач. Приводим также две задачи для самостоятельного решения (рис. 5, 6).

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

СКОЛЬКО ВРЕМЕНИ ИДЕТ СВЕТ ОТ МЕРКУРИЯ?

Уже давно никто не удивляется тому, что свету нужно время, чтобы дойти от небесного тела до Земли. Свет от Солнца «тратит» на свою дорогу около 8 минут. Эту цифру нетрудно проверить. Расстояние от Земли до Солнца составляет 150 миллионов *км*, то есть $1,5\cdot10^{11}$ *м*. Скорость света — около $3\cdot10^{8}$ *м/с*. Поделив одно число на другое, получим 500 *с* $\approx$ 8 *мин*.

Общая теория относительности вносит, однако, хотя и небольшие, но очень важные поправки в такие рассуждения. Эффекты общей теории относительности заметны лучше всего у Меркурия. О нем и будет идти речь.

Максимальное и минимальное значения расстояние Меркурий—Земля принимает в моменты «соединения» Меркурия с Солнцем, то есть в моменты, когда Земля, Солнце и планета лежат практически на одной прямой. В верхнем соединении, когда расстояние Меркурий — Земля максимально, оно равно $r_{max}=1,38$ астрономических единиц (1 *а. е.* — расстояние Земля — Солнце); в нижнем соединении оно минимально и равно $r_{min}=0,62$ *а. е.* (рис. 1) *). Если умножить эти числа на 8 минут, то получим грубо время прохождения света от Меркурия до Земли в обоих положениях. Такой расчет, конечно, дает правильный результат, если мы не интересуемся мелкими подробностями. Но именно о «мелочах» и будет речь.

Путь луча света в случаях, когда Меркурий находится в верхнем соединении, проходит мимо Солнца. Общая теория относительности приводит к выводу, что в поле тяжести Солнца скорость света меньше, чем в пустоте (как в веществе). Такое уменьшение

*) Напомним, что планеты движутся почти в одной плоскости—плоскости эклиптики. Мы не учитываем, что орбиты планет — эллипсы; учет этого приведет к небольшим вариациям r_{max} и r_{min}.

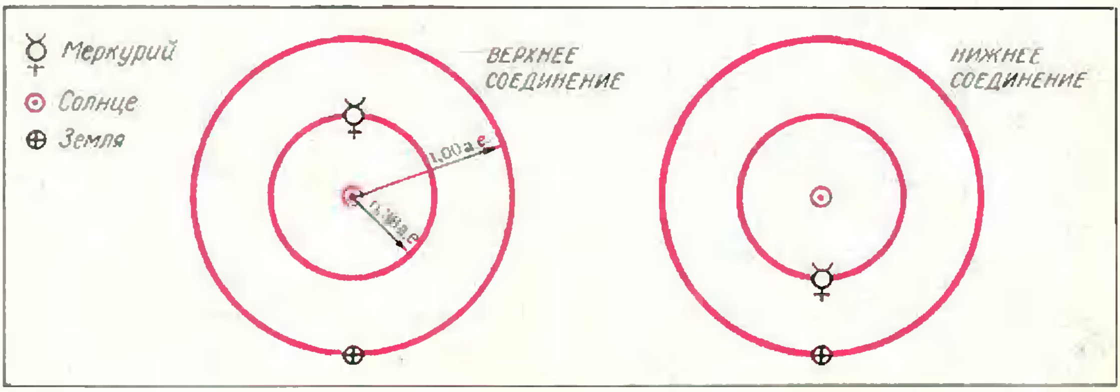


Рис. 1.

скорости очень мало, оно по расчетам приведет к увеличению времени прохождения света на 0,000 24 секунды (за такое время свет проходит 72 *км*). Современная радарная техника оказалась в состоянии зарегистрировать такой экзотический эффект.

Как можно понять это число 72 *км*? Ясно, что вычислить его сложно. Однако можно получить представление о порядке величины, если знать только о том, что такое гравитационный радиус и уметь работать с размерностями.

Количественной характеристикой поля тяжести массивного тела является потенциал поля, определяемый согласно закону всемирного тяготения Ньютона:

$$\varphi = -\frac{\gamma M}{r}.$$

В эту формулу входят две величины: произведение γM, которое характеризует источник поля — в нашем случае Солнце, и r — расстояние. Вместо γM часто в теории относительности пользуются другой величиной, отличающейся от γM только множителем, но имеющей размерность длины

$$R_{\text{гр}} = \frac{2\gamma M}{c^2}.$$

Эта величина называется гравитационным радиусом. Гравитационный радиус Солнца равен 3 *км*, гравитационный радиус Земли — 9 *мм* *).

Закон всемирного тяготения можно записать теперь так:

$$\frac{\varphi}{c^2} = -\frac{1}{2}\frac{R_{\text{гр}}}{r}.$$

Слева стоит потенциал поля тяжести в безразмерных единицах; справа стоит также безразмерная величина.**)

Величиной $\frac{\varphi}{c^2}$ обычно и характеризуют величину поля тяжести массивного тела.

Можно ожидать, что когда свет проходит у поверхности Солнца (при $r \approx R_\odot$), то его скорость будет уменьшаться на величину, пропорциональную $\frac{\varphi}{c^2} \sim \frac{R_{\text{гр}}}{R_\odot}$ (так как это единственная величина, которая характеризует поле Солнца):

$$\Delta v = \frac{c \cdot R_{\text{гр}}}{R_\odot}.$$

Можно сказать, что пространство около Солнца имеет оптические свойства среды с показателем преломления, немногим больше единицы.

Если бы сила тяжести действовала на свет только вблизи Солнца, например, на участке пути, протяженностью в 3—4 диаметра Солнца (возьмем для определенности 10 радиусов), то можно было бы сказать, что время прохождения света увеличивается на величину Δt, определяемую из уравнения

$$t + \Delta t = \frac{10R_\odot}{v_{\text{св}}} = \frac{10R_\odot}{c - \Delta v} \approx \frac{10R_\odot}{c}\left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right),$$

или

$$\Delta t \approx \frac{10R_\odot}{c}\cdot\frac{\Delta v}{c} = \frac{10R_\odot}{c}\,\frac{R_{\text{гр}}}{R_\odot} = \frac{10R_{\text{гр}}}{c}.$$

Такая оценка дает для Δt время, необходимое свету для прохождения пути в 30 *км*. Конечно, наша оценка грубая; особенно непоследователен выбор коэффициента 10. Более того, как оказывается, правильная формула содержит еще и расстояние от Солнца до планет и радиус Солнца, так как на всем пути (а не только вблизи Солнца) от Земли до планеты и обратно время течет медленнее. Мы этого не заметили, так как пренебрегли действием Солнца на свет на больших расстояниях. Тем не менее наша оцен-

*) Обратите внимание, что принято определять $R_{\text{гр}}$ с коэффициентом 2. Иногда встречаются формулы без этого коэффициента.

**) Безразмерной величиной называется величина, которая не изменяется с изменением единиц измерения.

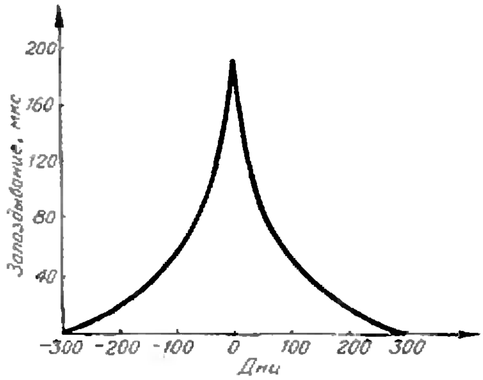


Рис. 2.

ка полезна для того, чтобы ориентироваться в задаче. Более точная формула теории относительности гласит

$$\Delta t = \frac{2R_{\text{гр}}}{c}\left\{1 + \ln\frac{R_{\odot}^2}{r_1 \cdot r_2}\right\},$$

где под логарифмом *) радиус Солнца и расстояния от Солнца до Земли и до Меркурия. Именно логарифм мы и «прозевали» в наших рассуждениях. Этот логарифм вовсе не мал, а равен 11,2, так что точная формула имеет вид:

$$\Delta t = \frac{22{,}4R_{\text{гр}}}{c}.$$

Чтобы проверить эту формулу по данным наблюдений, надо хорошо знать момент, отвечающий верхнему соединению в случае, если бы Солнце не оказывало влияния на свет. Для этого надо знать астрономические расстояния с точностью до 1—2 *км*. Такие требования на пределе современных возможностей.

Опыт встречает и другие трудности. Так, не очень просто узнать, от какой точки поверхности планеты отразился сигнал — измеряется время путешествия сигнала от Земли к планете и (после отражения) обратно (радарное эхо).

Тем не менее такие опыты были проделаны группой американских физиков. Измерялись сигналы, посланные на Меркурий, Венеру и Марс. Результаты согласовались с предсказанием теории; однако ошибки обработки опытов были еще велики (около 5—10%).

На рисунке 2 показана одна из кривых запаздывания сигнала в разные дни. Ноль на шкале абсцисс — момент верхнего соединения.

*) Логарифм в этой формуле «натуральный», то есть по основанию *e*. Он в 2,3 раза больше десятичного логарифма.

Отклонение луча света в поле Солнца

Выше было сказано, что пространство около Солнца действует на свет как среда с показателем преломления немного больше единицы. Это значит, что свет далеких звезд, проходя около Солнца, должен искривлять свой путь подобно тому, как это происходит в призме. В принципе этот эффект был известен уже давно. Еще когда Ньютон выдвинул теорию, согласно которой свет представляет собой поток мельчайших частиц — корпускул, ему было ясно, что свет должен притягиваться к Солнцу. Так как в поле тяжести ускорение всех тел одинаково, то путь света не зависит от массы корпускулы и представляет собой параболу. Напомним, что в законы Кеплера не входит масса планет. Зандеманн в 1801 году вывел из этих соображений формулу, согласно которой луч света, проходящий вблизи края солнечного диска, отклоняется на угол $\theta = R_{\text{гр}}/R_{\odot} \approx 0{,}85''$. Этот результат оказался ошибочным. В 1915 году Эйнштейн на основе созданной им общей теории относительности получил новую формулу, которая давала для эффекта вдвое большее значение

$$\theta = \frac{2R_{\text{гр}}}{R_{\odot}} \approx 1{,}7''.$$

Впервые отклонение луча света было измерено в 1919 году. 27 сентября 1919 года Эйнштейн писал матери: «Сегодня хорошие новости! Лоренц телеграфировал мне, что британская экспедиция действительно доказала смещение света вблизи Солнца».

С тех пор эффект Эйнштейна измеряли во время почти каждого затмения Солнца. Однако получить достаточно точное значение оказалось очень трудно. Надо очень точно измерить положение звезды около Солнца и примерно через полгода, когда Солнце покинет эту область неба. Но при двух измерениях изменяется состояние атмосферы, изменяется преломление в атмосфере Солнца, короче, возникает целая система поправок, которые ухудшают условия для сравнения.

Тем не менее сейчас в результате огромной работы многих астрономов удалось уменьшить ошибку настолько, что можно говорить о согласии теории с опытом в пределах ошибок, составляющих не более 1% от величины эффекта.

Лучшие до сего времени результаты получены при изучении затмения квазаров — мощных источников радиоизлучения. Преимущество наблюдения радиоисточников очевидно: регистрация их излучения не требует затмения и можно производить измерения все время.

Таким образом, уже сейчас можно считать установленным, что скорость света вблизи массивных небесных тел изменяется — такие тела действуют как огромные собирающие линзы. При этом преломление заведомо больше, чем это следует из эффекта притяжения кванта света к Солнцу по закону Ньютона. Это значит, что для света закон всемирного тяготения оказывается не точным, свет притягивается сильнее, чем простое тело с массой, вычисленной по формуле $mc^2 = h\nu$ (энергия кванта). Это и есть эффект искривления пространства около Солнца.

Ньютон и этика

Приводим отрывок из письма Ньютона к секретарю Английского Королевского общества Астону, отправляющемуся в заграничное путешествие.

Это письмо представляет большой интерес для характеристики личности ученого.

«Сэр,

В письме Вашем Вы позволяете мне, не стесняясь, высказать мое суждение о том, что может быть для Вас полезным в путешествии, поэтому и делаю это значительно свободнее, чем было бы прилично в ином случае.

Когда Вы будете в новом для Вас обществе, то: 1) наблюдайте нравы; 2) приноравливайтесь к ним, и Ваши отношения будут более свободны и откровенны; 3) в разговорах задавайте вопросы и выражайте сомнения, не высказывая решительных утверждений и не затевая споров . . . Вы мало или ничего не выиграете, если будете казаться умнее или менее невежественным, чем общество, в котором Вы находитесь; 4) если Вы будете оскорблены, то в чужой стороне лучше смолчать или свернуть на шутку, хоть бы и с некоторым бесчестием, чем стараться отомстить. . . Если положение будет безвыходным, то, полагаю, лучше всего сдержать свою страсть и язык в пределах умеренного тона, не раздражая противника и его друзей и не доводя дело до новых оскорблений. Одним словом, если разум будет господствовать над страстью, то он и настороженность станут Вашими лучшими защитниками».

В. Я. САННИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРЕСНОЙ КНИГЕ

В свое время я приобрел сборник «Математика в современном мире» (М., Мир, 1967). При чтении его у меня возникли непредвиденные трудности. На «участке» страниц 113—144 порядок страниц оказался весьма своеобразным. Прочитав с. 113, каждый ожидает на обороте того же листа увидеть с. 114, а видит — с. 118. Далее должна быть с. 115, а в моем экземпляре здесь оказалась с. 119 и так далее. Иными словами, порядок страниц на этом участке можно представить такой последовательностью:
(113, 118), (119, 116), (117, 114), (115, 120), (121, 126), (127, 124), (125, 122), (123, 128), (129, 134), (135, 132), (133, 130), (131, 136), (137, 142), (143, 140), (141, 138), (139, 144).

Составив такую «схему расположения страниц» для выделенного участка книги, я уже не испытывал прежних трудностей при переходе от прочитанной страницы к следующей по порядку.

Можно было бы этот эпизод с необычным экземпляром книги оставить без внимания. Однако вполне естественно возникает вопрос — как образовался такой порядок страниц в книге, в чем состоит ошибка печатника?

Выскажем некоторые соображения по этому вопросу, предоставив полное его решение читателю.

В выходных данных о книге сообщается «Бумага... $70 \times 108^1/_{16}$ = = 6,5 бум. л.». Эта условная фраза означает следующее: книга сшита из 6,5 тетрадей, каждая полная тетрадь образована четырехкратным складыванием пополам листа форматом 70 × 108 *см* (полутетрадь — из листа форматом 70 × 54 *см*, полная тетрадь содержит 16 книжных листов форматом 17,5 × 27 *см*.

Чтобы избежать ошибок при сборке тетрадей в книгу, они нумеруются. В нашей книге полутетрадь идет под номером 3. Необычная тетрадь имеет номер 5.

Условимся о таком порядке типографского изготовления полной тетради: набираем в отдельности все 32 ее страницы вместе с их порядковыми номерами, формируем из них пару «матриц» по 16 страниц каждая, производим с обеих матриц оттиски на обеих сторонах листа, образуем тетрадь последовательным складыванием бумажного листа пополам.

Введем два понятия, необходимые для дальнейшего.

Назовем с х е м о й книжной тетради прямоугольную таблицу, за-

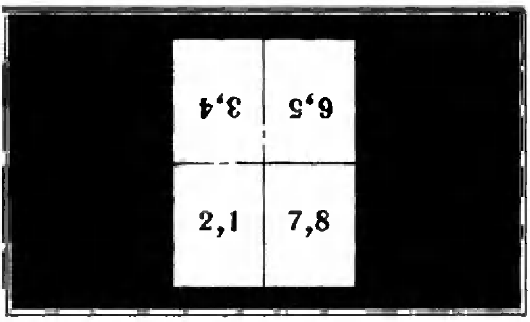


Рис. 1.

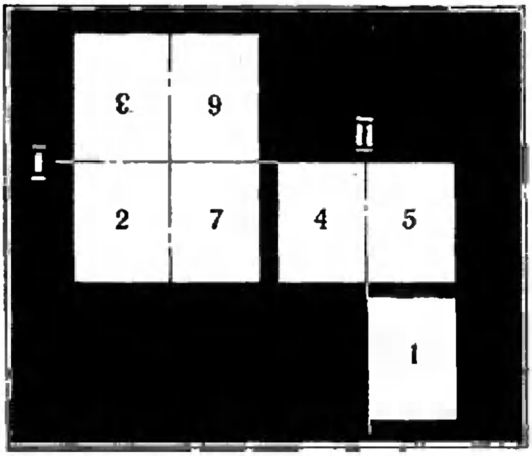


Рис. 2.

полненную ориентированными по вертикали парами чисел (нормально расположенными или перевернутыми), первые компоненты которых обозначают номера страниц одной, а вторые — другой стороны бумажного листа.

На рисунке 1 приведена одна из возможных схем книжной тетради на 8 страниц.

Назовем порядок складывания пополам листа нормальным, если последняя страница будущей тетради ни разу не переворачивается и после складывания она пригодна для сшивания по корешку (все сгибы здесь вложены друг в друга).

На рисунке 2 показано, как посредством нормального складывания из листа, приведенного на рисунке 1, получить соответствующую тетрадь.

Нетрудно показать, что для случая тетради из 8 страниц существует только одна схема, из которой нормальным складыванием можно ее получить. Для случая тетради из 16 (или 32) страниц таких схем уже несколько.

Задачи

1. Составить всевозможные схемы книжной тетради № 5 упомянутой книги, из которых нормальным складыванием можно получить тетрадь с неперепутанными страницами. Указать соответствующий каждой схеме порядок нормального складывания.

2. Та же задача для тетради с перепутанными страницами.

3. Указать наиболее рациональный способ исправить ошибку печатника.

Конфуз с «Обратной теоремой»

Не часто, совсем не часто прибегают писатели к математической терминологии. А художественное произведение с «математическим названием» — вообще большая редкость. Поэтому не могла не привлечь к себе естественного интереса повесть А. Жаренова «Обратная теорема» (журнал «Искатель», 1972 г., № 2).

Скажем сразу, о математике как таковой в повести речь специально не идет. Там рассказывается о жизни Виктора Назарова, однажды нечестным путем завладевшего весьма крупной суммой денег. Собственно, деньги были целью и смыслом его жизни. Однако после этого его жизнь, вместо того чтобы стать, как он надеялся, счастливой и безоблачной, наполнилась сплошными кошмарами и постоянным страхом перед возмездием. Обогащение Назарова стало известно уголовным элементам, и за «подпольным миллионером» устроили настоящую охоту, окончившуюся его убийством. Параллельно с жизнеописанием Назарова разворачивается детективная линия повести — расследование этого преступления.

Вот как описывает автор тяжкие размышления Назарова, на сознание которого постоянно давит совершенное им преступление:

«В тумане лицо школьного учителя математики: «Дети, теоремой мы называем такие рассуждения . . . Если в теореме заключение сделать условием, а условие заключением, то первая будет прямой, а вторая обратной . . . Дети, если верна прямая теорема, то это еще не значит, что верна и обратная ей . . .»

(окончание см. на с. 47)

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Гидродинамический механизм в падающей пробирке

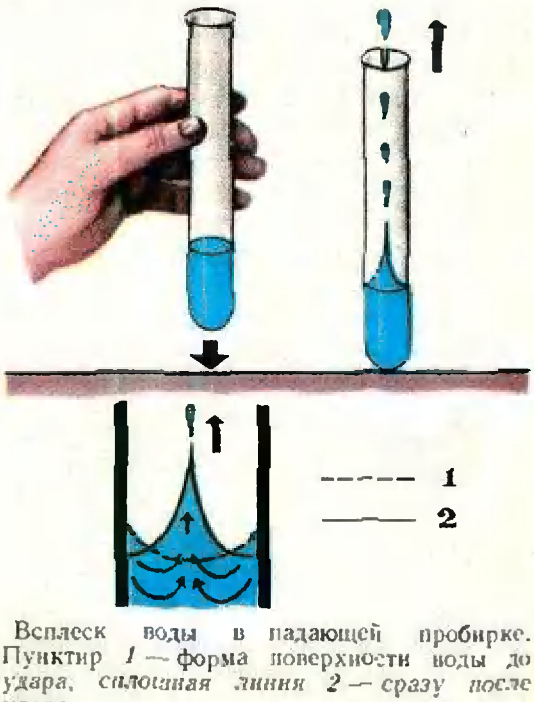
Г. И. Покровский

Налейте воды в обыкновенную пробирку и, придерживая ее рукой как показано на рисунке, дайте ей упасть (*с небольшой высоты*), *сохраняя вертикальное положение*, на поверхность стола. Эта поверхность должна быть достаточно твердой, чтобы дно пробирки произвело жесткий удар. В момент такого удара мениск воды в пробирке, имеющий (вследствие действия капиллярных сил) вогнутую форму, быстро выравняется, и из его центральной части по оси пробирки стремительно вырвется вверх тонкая струя воды. Эта струя распадается на капли, причем первая из них взлетает на высоту, существенно превосходящую высоту падения пробирки. Это значит, что энергия воды в пробирке в момент удара перераспределяется таким образом, что небольшая часть воды вблизи центральной части мениска получает большую скорость и стремительно выбрасывается вверх.

Устройство, перераспределяющее энергию, можно назвать механизмом. Обычно этим словом называют сочетание деталей, сделанных из твердого вещества (рычаги, шестерни и т. п.). Однако могут быть механизмы из жидкостей и даже из газов. Примером механизма такого рода и является вода в пробирке.

Гидродинамические механизмы имеют особое значение тогда, когда действуют очень большие силы, которых не могут выдержать обычные детали из твердого вещества. Например, при взрыве заряда взрывчатого вещества большой мощности можно сконцентрировать часть энергии этого взрыва, сделав в заряде выемку и вложив в нее металлическую вогнутую облицовку. Сила взрыва сожмет металл облицовки и создаст тонкую металлическую струю. Скорость этой струи может (при соответствующей форме облицовки) достичь даже второй космической скорости.

Таким образом, наблюдение и анализ очень простого и скромного явления, происходящего в пробирке, раскрывает одну из интереснейших проблем гидродинамики сверхвысоких скоростей.



Всплеск воды в падающей пробирке. Пунктир *1* — форма поверхности воды до удара, *сплошная линия 2 — сразу после удара.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

20 задач на пределы

М. Л. Гервер

Многие, вероятно, знают определение предела последовательности: «Число a называется пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n > N$...». Но одно дело — помнить его, и совсем другое — уметь свободно с ним обращаться, доказывать теоремы, не путаясь со всеми «найдется», «для любого» и т. п. Это, пожалуй, самая крутая ступенька на пути к «высшей математике», которую с трудом преодолевают не только школьники, но и студенты.

Если Вам удастся решить задачи, которые собраны в этой статье — или хотя бы разобраться в их решениях — то дальше заниматься математическим анализом Вам будет намного проще и интереснее.

1. Докажите, что при любом натуральном n

а) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1}$;

б) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{7}{4}$;

в) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}$.

В дальнейшем буквой n мы будем обозначать только натуральные числа.

2. а) Докажите, что найдется такое n, что $2^n > 10^{10}$.

б) Докажите, что при любом n и при любом $a > 0$ выполняется неравенство $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

в) Докажите, что найдется такое k, что при любом $n > k$ справедливо неравенство $10^n > n^{10}$.

г) Пусть $|q| < 1$. Докажите, что найдется такое k, что при любом $n > k$ справедливо неравенство $|q|^n < 10^{-10}$.

д) Существует ли такое положительное число, которое при любом n меньше, чем $1/n$?

е) Пусть $|q| < 1$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что при любом $n > k$ справедливо неравенство $|q|^n < \varepsilon$*).

ж) Можно ли найти такое k, чтобы при любом $n > k$ и при любом $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$?

Замечание. Сравнивая 2е и 2ж, мы видим, что порядок слов — вещь важная!

з) Положим $s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что для лю-

*) ε — греческая буква, читается: «эпсилон», употребляется обычно для обозначения маленьких положительных чисел. Точного смысла слова «маленькие числа» не имеют, — что значит «маленькое»: 0,01 или 10^{-10}? Вот и говорят: «для любого $\varepsilon > 0$» — подразумевая под этим обычно: «как бы мало ни было $\varepsilon > 0$». По отношению к задаче сказанное означает: положим $\varepsilon = 0{,}01$, тогда найдется такое k, что при любом $n > k$ будет $|q|^n < 0{,}01$; положим $\varepsilon = 10^{-10}$, тогда найдется другое k (побольше) такое, что при всяком n, большем, чем это новое k, будет $|q|^n < 10^{-10}$; вообще для любого $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) можно подобрать такое k (может быть, очень большое), что при всех $n > k$ будет $|q|^n < \varepsilon$.

бого $n > k$

$$|s_n - 1| < \varepsilon.$$

Числовые последовательности. Напишем какое-нибудь число: x_1, потом другое: x_2, потом третье: x_3 и т. д.

Мы получим *числовую последовательность*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

Номер рядом с буквой x указывает, на каком месте стоит число в последовательности: x_1 — на 1-м, x_2 — на 2-м, ..., x_n — на n-м, ...

Короче, она обозначается символом $\{x_n\}$. Разумеется, для обозначения последовательностей можно употреблять и другие буквы: $\{s_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ и т. д.

Выпишем десяток последовательностей, используемых в следующих задачах:

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(2) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, \ldots$

(3) $\{s_n\}$, $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

(4) $\{y_n\}$, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots - \frac{(-1)^n}{2^n}$.

(5) $1, 1, 1, 1, \ldots$

(6) $1, -1, 1, -1, \ldots$

(7) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots$

(8) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$

(9) $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \ldots, \frac{1}{9}, \frac{1}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{11}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{99}, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}, \frac{1}{3}, \ldots$

(знаменатель дроби, стоящей на четном месте, равен числу знаков знаменателя предыдущей дроби).

(10) $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \ldots$

Определение 1. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что для любого $n > k$

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число a является пределом $\{x_n\}$, записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

(читается: «предел x_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a») или так:

$$x_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

(читается: «x_n стремится к a при n, стремящемся к бесконечности»). Иногда упоминание про n, стремящееся к бесконечности, опускают и пишут просто:

$$\lim x_n = a \text{ или } x_n \to a.$$

Последовательности, имеющие предел, называют *сходящимися*.

3. а) Сформулируйте задачи 2е и 2з, используя определение 1.

б) Докажите, что 0 есть предел последовательностей (1), (2), (8) и (9).

в) Найдите пределы последовательностей (3), (4) и (10).

г) Докажите, что 1 не есть предел последовательности (1).

д) Имеют ли пределы последовательности (5), (6) и (7)?

е) Пусть x_n — n-й член последовательности (9). Укажите такое k, чтобы при $n > k$ выполнялось неравенство $x_n < \frac{1}{2}$.

ж) Могут ли два разных числа быть пределами одной и той же последовательности?

4. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность. Выпишем какой-нибудь из ее членов, потом еще один — с большим номером, потом третий — с еще большим номером и т. д. Получим *подпоследовательность* последовательности $\{x_n\}$.

а) Если $\{x_n\}$ сходится, то любая ее подпоследовательность сходится, причем к тому же пределу. Докажите.

б) Если всякая подпоследовательность $\{x_n\}$ сходится, то сама последовательность $\{x_n\}$ сходится. Докажите.

в) Пусть $\{y_n\}$ состоит из тех же членов, что $\{x_n\}$, но взятых в другом порядке. Докажите, что если $x_n \to a$, то и $y_n \to a$.

Геометрический смысл. Будем изображать члены последовательности $\{x_n\}$ точками на числовой оси (при этом разные члены последовательности могут попасть в одну и ту же точку; например, в последовательности (7) все члены с нечетными номерами попадут в точку 1). Пусть $x_n \to a$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем на числовой оси интервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$. Тогда вне этого интервала или совсем не окажется членов последовательности $\{x_n\}$, или их будет только конечное число. Все x_n с номерами, большими, чем некоторое k_ε, попадут внутрь интервала $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$. Таков геометрический смысл понятия «предел последовательности».

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если найдется такое C, что для любого n

$$|x_n| < C.$$

5. а) Каков геометрический смысл понятия «ограниченная последовательность»?

б) Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Верно ли обратное?

в) Придумайте ограниченную последовательность, которая имеет и наибольший, и наименьший член; имеет наибольший, но не имеет наименьшего; имеет наименьший, но не имеет наибольшего; не имеет ни наименьшего, ни наибольшего члена. Все ли 4 указанных случая возможны, если последовательность имеет предел?

г) Приведите пример последовательности, которая не является ограниченной. Такие последовательности называются *неограниченными*.

Без отрицаний. Попробуем сформулировать определение неограниченной последовательности, не употребляя отрицаний. Для краткости утверждение «для любого n выполняется неравенство $|x_n| < C$» обозначим одной буквой $У$. Тогда определение ограниченной последовательности $\{x_n\}$ будет выглядеть так: найдется такое C, что справедливо $У$. Что означает, что $\{x_n\}$ — неограниченная? Что такого C не найдется, чтобы $У$ было справедливо. Другими словами, какое бы C ни взять, $У$ несправедливо. Мы получили промежуточный (не окончательный) вариант определения:

$\{x_n\}$ *называется неограниченной, если для любого C утверждение $У$ несправедливо.*

Расшифруем последнюю часть этого определения: «$У$ несправедливо». Подробней это означает, что не для любого n выполняется неравенство $|x_n| < C$. Не для любого n выполняется,— значит, для некоторого n не выполняется. Для некоторого n неравенство $|x_n| < C$ не выполняется,— значит, для этого n выполняется противоположное неравенство: $|x_n| \geq C$. Итак, «$У$ несправедливо» означает: «найдется такое n, что $|x_n| \geq C$». Таким образом, окончательно получаем:

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого C найдется такое n, что $|x_n| \geq C$.

6. Не употребляя отрицаний, сформулируйте следующие утверждения:

а) Число a не является пределом $\{x_n\}$.

б) Последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела.

Определение 4. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к бесконечности* (это записывают так: $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$), если для любого C найдется такое k, что для любого $n > k$ $|x_n| > C$.

7. Какие из следующих последовательностей стремятся к бесконечности и какие являются неограниченными?

а) $x_n = n$, б) $x_n = (-1)^n \cdot n$,

в) $x_n = n^{(-1)^n}$

г) $x_n = \begin{cases} n^2 \text{ при } n \text{ четном,} \\ \sqrt{n} \text{ при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$

Определение 5. Число a называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого k найдется такое $n > k$, что $|a - x_n| < \varepsilon$.

8. Докажите а) что предел сходящейся последовательности является ее предельной точкой,

б) что если $x_n \to a$ и $b \neq a$, то b не есть предельная точка $\{x_n\}$.

в) что если a — предельная точка $\{x_n\}$, то $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к a.

9. Придумайте последовательность $\{x_n\}$, предельными точками которой являются:

а) все натуральные числа (и только они),

б) все числа вида $^1/_n$,

в) все рациональные числа.

10. а) Придумайте последовательность, удовлетворяющую задаче 9а, в которой при этом нет целых чисел.

б) Пусть $\{x_n\}$ удовлетворяет задаче 9б. Может ли 0 не быть ее предельной точкой?

в) Укажите все предельные точки последовательности, удовлетворяющей задаче 9в.

16 условий. «Any» по-английски значит «любой», «Exist» — «существовать». Символы $\forall$ и $\exists$ — перевернутые 1-е буквы этих слов — означают соответственно:

«для любого» и «найдется такое,. . . что».

Рассмотрим следующие 16 условий:

1) $\exists \varepsilon > 0\, \exists k\, \exists n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
2) $\exists \varepsilon > 0\, \exists k\, \exists n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
3) $\exists \varepsilon > 0\, \exists k\, \forall n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
4) $\exists \varepsilon > 0\, \exists k\, \forall n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
5) $\exists \varepsilon > 0\, \forall k\, \exists n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
6) $\exists \varepsilon > 0\, \forall k\, \exists n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
7) $\exists \varepsilon > 0\, \forall k\, \forall n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
8) $\exists \varepsilon > 0\, \forall k\, \forall n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
9) $\forall \varepsilon > 0\, \exists k\, \exists n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
10) $\forall \varepsilon > 0\, \exists k\, \exists n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
11) $\forall \varepsilon > 0\, \exists k\, \forall n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
12) $\forall \varepsilon > 0\, \exists k\, \forall n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
13) $\forall \varepsilon > 0\, \forall k\, \exists n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
14) $\forall \varepsilon > 0\, \forall k\, \exists n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
15) $\forall \varepsilon > 0\, \forall k\, \forall n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
16) $\forall \varepsilon > 0\, \forall k\, \forall n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

11. Какие из этих условий выражают уже знакомые вам свойства последовательностей (быть ограниченной, иметь a пределом или предельной точкой, стремиться к бесконечности) или отрицания этих свойств? Каков смысл остальных условий?

Определение 6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если выполняется одно из двух условий:

1) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$,
2) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$

В первом случае $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, во втором — *убывающей*.

12. а) Докажите, что любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

б) Докажите, что предельная точка монотонной последовательности является ее пределом.

в) Докажите, что всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел (иногда это свойство действительных чисел принимают за аксиому).

13. а) Докажите, что всякая ограниченная последовательность имеет хоть одну предельную точку.

б) Проверьте, что утверждения 12в и 13а эквивалентны: каждое можно вывести из другого (так что 13а тоже можно принять за аксиому).

14. а) Пусть $|q| < 1$, $s_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$. Докажите, что последовательность $\{s_n\}$ сходится, и

найдите ее предел.

б) Проверьте, что при $|q| \geq 1$ последовательность $\{s_n\}$ не имеет предела.

15. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$ при $n \to \infty$. Докажите, что тогда

а) $x_n + y_n \to a + b$,

б) $x_n - y_n \to a - b$,

в) $x_n y_n \to ab$,

г) если $b \neq 0$, то $x_n/y_n \to a/b$.

Замечание. Среди y_n могут быть нули, но если $b \neq 0$, их (докажите это) лишь конечное число: $\exists N \forall n > N \quad y_n \neq 0$; последовательность x_n/y_n заведомо определена, таким образом, для $n > N$.

д) Если $b = 0$, то последовательность x_n/y_n (если она определена) может не иметь предела, может стремиться к любому числу или к бесконечности,— приведите соответствующие примеры.

16. а) Докажите, что если $x_n \geq 0$ при всех n и $x_n \to a$ при $n \to \infty$, то $a \geq 0$.

б) Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$, если все $x_n > 0$?

в) Пусть $x_n \leq y_n \leq z_n$, и пусть $x_n \to a$ и $z_n \to a$ при $n \to \infty$. Докажите, что тогда $y_n \to a$ при $n \to \infty$.

17. а) Последовательность $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что для любого $n > k$ и любого натурального p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Докажите, что тогда $\{x_n\}$ имеет предел.

б) Докажите обратное утверждение: если x_n — сходящаяся последовательность, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \ \forall n > k \ \forall p \ \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

в) Последовательность $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: $\forall \varepsilon > 0 \ \forall p \ \exists k \ \forall n > k \ \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Обязана ли $\{x_n\}$ сходиться?

18. Построим последовательность $\{x_n\}$ так: $|x_n| = 1/2^n$, знаки $x_1, x_2, x_3, \ldots$ выберем произвольно. Далее положим $s_n = x_1 + \ldots + x_n$.

а) Докажите, что последовательность $\{s_n\}$ сходится.

б) Укажите все значения, которые может принимать $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (когда знаки x_n выбираются всевозможными различными способами).

Комплексные $\{x_n\}$. До сих пор мы рассматривали последовательности, состоявшие из действительных чисел.

Пусть теперь x_n — любые комплексные числа.

Определение предела в этом случае — дословно такое же, как прежде. Но геометрический смысл его иной: неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает теперь, что x_n лежит внутри круга радиуса ε с центром в точке a; следовательно, число a служит пределом $\{x_n\}$, если вне любого круга с центром a лежит лишь конечное число членов $\{x_n\}$.

19. а) Пусть $x_n = a_n + ib_n$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся обе последовательности: $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Докажите.

б) Пусть $|x_n| = r_n$, $\arg x_n = \alpha_n$. Верно ли, что $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся и $\{r_n\}$, и $\{\alpha_n\}$?

20. Пусть последовательность $\{x_n\}$ стремится к 0. Построим последовательность $\{s_n\}$ так:

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_1 + x_2, \ \ldots, \quad s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ \ldots$$

Выясните, может ли $\{s_n\}$ иметь ровно две предельные точки:

а) если x_n — действительные числа,

б) если x_n — комплексные числа (в этом случае определение предельной точки — дословно такое же, как раньше).

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА „КВАНТА“

В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получают право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных и городских олимпиад.
За прошлый, 1973 год, редакция получила более шести тысяч писем с решениями задач. Редколлегия журнала «Квант» совместно с Оргкомитетом Всесоюзной олимпиады отобрала авторов правильных и наиболее интересных решений.
Ниже публикуется список школьников, — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участвовать в областных, краевых и республиканских (в АССР и союзных республиках без областного деления) олимпиадах 1974 года.

К участию в математической олимпиаде допущены

П. Агаронов — Баку, с. ш. 56, 10 кл.
Л. Басов — Пржевальск, с. ш. 11, 10 кл.
И. Бахмутский — Львов, с. ш. 52, 9 кл.
Е. Башкиров — Минск, с. ш. 50, 10 кл.
С. Белолипецкий — Киржач Владимирской обл., с. ш. 5, 10 кл.
А. Берлин — Бобруйск, с. ш. 3, 10 кл.
А. Блох — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
А. Брысьев — р. п. Тюльган Оренбургской обл., Тюльганская с. ш., 9 кл.
А. Вальков — Ташкент, с. ш. 110, 10 кл.
Р. Вассерман — Одесса, с. ш. 116, 10 кл.
А. Векслер — Ташкент, с. ш. 50, 10 кл.
А. Войновский — Баку, с. ш. 221, 10 кл.
А. Гончаров — Никополь, с. ш. 13, 8 кл.
А. Григорян — Баку, с. ш. 221, 10 кл.
Г. Гутин — Клинцы Брянской обл., с. ш. 2, 10 кл.
К. Данильченко — Волгоград, с. ш. 35, 9 кл.
А. Еременко — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
М. Закс — Пермь, с. ш. 7, 10 кл.
А. Засловский — Калинин, с. ш. 20, 10 кл.
С. Зенович — Ташкент, с. ш. 50, 10 кл.
С. Ильинков — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
М. Кобозев — Киев, с. ш. 173, 10 кл.
В. Кобылецкий — Баку, с. ш. 134, 9 кл.
С. Коршунов — п. Монино Московской области, с. ш. 1, 9 кл.
А. Кукуш — Киев, с. ш. 145, 10 кл.
М. Левин — Витебск, с. ш. 2, 10 кл
М. Любич — Харьков, с. ш. 27, 8 кл.
А. Макаричев — Львов, с. ш. 14, 10 кл.
С. Мельник — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
А. Мехович — Владивосток, с. ш. 75, 10 кл.
В. Мильман — Минск, с. ш. 19, 10 кл.
Л. Михлин — Курск, с. ш. 6, 9 кл.
Г. Мустафаев — Сиазань Аз. ССР, с. ш. 1, 10 кл.
С. Нужный — Куйбышев, с. ш. 135, 10 кл.

С. Охитин — Оренбург, с. ш. 30, 9 кл.
В. Паньков — Минск, с. ш. 93, 10 кл.
Е. Пасике — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
С. Путинцев — Кемерово, с. ш. 10, 10 кл.
А. Разгуляев — Клин, с. ш. 10, 10 кл.
А. Рашковский — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
А. Резников — Киев, с. ш. 145, 9 кл.
А. Репецкий — Краматорск, с. ш. 5, 9 кл.
С. Родионов — Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
А. Рязанов — Новокузнецк, с. ш. 16, 10 кл.
С. Сатановский — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
В. Сац — Киев, с. ш. 198, 10 кл.
Г. Скляр — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
В. Слепой — Фрунзе, с. ш. 62, 10 кл.
А. Слесаренко — Рубцовск Алтайского края, с. ш. 11, 10 кл.
А. Ткач — Каменец-Подольский Хмельницкой обл., с. ш. 13, 10 кл.
М. Харитонов — Павлоград, с. ш. 7, 10 кл.
А. Черебатов — Омск, с. ш. 82, 9 кл.
Н. Чернов — Кривой Рог, с. ш. 95, 10 кл.
Ю. Шмелев — Ярославль, с. ш. 20, 9 кл.
Н. Щербина — Днепропетровск, с. ш. 80, 10 кл.
А. Щехорский — с. Старики Житомирской обл., Иршанская с. ш., 10 кл.
И. Юнус — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Р. Ямилов — Уфа, с. ш. 86, 10 кл.

К участию в физической олимпиаде допущены

А. Амельченко — Магнитогорск, с. ш. 53, 10 кл.
Р. Басыров — д. Н. Каракитяны ТАССР, Дрожжановская с. ш., 9 кл.
О. Войнова — п. Кош-Тегирмен Кирг. ССР, с. ш. 1, 10 кл.
С. Герц — Хуст, Закарпатская обл. с. ш. 1, 10 кл.
Л. Глазман — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
А. Гуревич — Минск, с. ш. 50, 10 кл.
А. Давыдов — Магнитогорск, с. ш. 53, 10 кл.
В. Жук — Грозный, с. ш. 57, 10 кл.
В. Канзюба — Днепродзержинск, с. ш. 37, 10 кл.
М. Качановский — Пинск, с. ш. 4, 10 кл.
Я. Коган — Глазов, с. ш. 14, 9 кл.
С. Коршунов — п. Монино Московской обл., с. ш. 1, 9 кл.
Л. Кофман — Таллин, с. ш. 15, 10 кл.
С. Макаров — Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
С. Мельник — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
С. Нужный — Куйбышев, с. ш. 135, 10 кл.
А. Ремеев — Ташкент, с. ш. 110, 10 кл.
Р. Сирота — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Ю. Смоленцев — Ессентуки, с. ш. 3, 10 кл.
М. Султангалиев — с. Ваныш БАССР с. ш. 1, 10 кл.
В. Татаринов — п. Знобь-Новгородское Сумской обл., Знобь-Новгородская с. ш., 10 кл.
И. Усвят — Ташкент, с. ш. 110, 10 кл.
Е. Федоров — Магнитогорск, с. ш. 53, 10 кл.
В. Хацимовский — Красноярск, с. ш. 98, 9 кл.
Е. Шафирович — Ногинск Московской обл., с. ш. 3, 10 кл.
В. Шнейдман — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 мая 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: Задачник «Кванта», М251, М252 «или»... Ф263». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта"», «новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные отмечены звездочкой.

Задачи

М251-М255; Ф263-Ф267

М251. Дано n фишек нескольких цветов, причем фишек каждого цвета не более $\frac{n}{2}$. Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом.

Ф. Г. Шлейфер

М252. а) На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a. Его разрешается «перекатывать» по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки M плоскости и любого $\varepsilon > 0$ можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки M на расстоянии меньше ε (рис. 1).

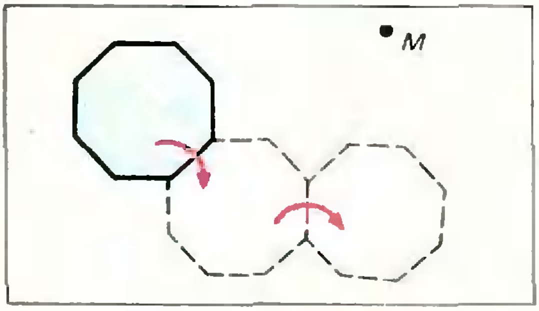


Рис. 1.

б) Решите аналогичную задачу для правильного пятиугольника.

в*) Для каких правильных n-угольников верно аналогичное утверждение?

Г. А. Гальперин

М253. На плоскости заданы три точки, являющиеся соответственно центрами вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей треугольника. Как по этим данным восстановить треугольник?

(Напомним, что вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон.)

Б. В. Мартынов

М254. Вычислите значение $\sqrt{0,\underbrace{11111\ldots11111}_{100}}$ с точностью

а) 100 знаков после запятой; б) 101 знака после запятой; в *) 200 знаков после запятой.

А. А. Егоров

М255*. AB и CD — две различные касательные к двум данным шарам (A и C принадлежат поверхности одного шара, B и D — другого). Докажите, что проекции отрезков AC и BD на прямую, проходящую через центры шаров, равны.

И. Ф. Шарыгин

Ф263. Матированное стекло (одна из поверхностей стекла гладкая, другая шероховатая) прикладывают к чертежу: один раз гладкой поверхностью кверху, другой раз — книзу. В одном случае чертеж виден хорошо, в другом — разобрать его невозможно. Почему?

Ф264. Две одинаковые круглые плоские металлические пластины, расположенные так, как показано на рисунке 2, вращают с угловой скоростью ω в противоположные стороны в магнитном поле, перпендикулярном плоскостям пластин. Индукция магнитного поля равна B, расстояние между пластинами a. Оси пластин соединяют проводником. Найти установившееся распределение плотности зарядов на пластинах.

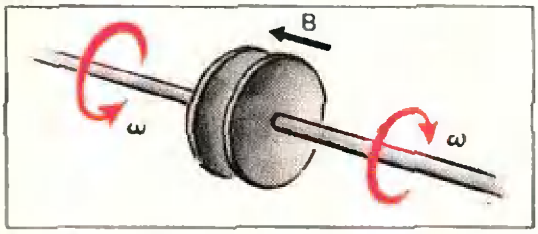


Рис. 2.

Ф265. Мальчик, сидящий на санках, хочет подтянуть себя к стене с помощью веревки, прикрепленной к санкам и перекинутой через блоки

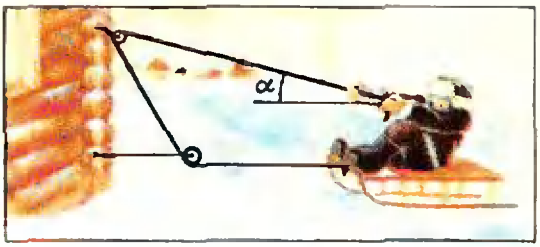


Рис. 3.

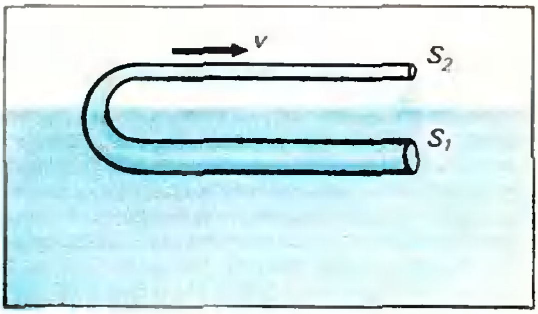


Рис. 4.

(рис. 3). Каким должен быть для этого коэффициент трения мальчика о санки, если масса санок m, масса мальчика M, коэффициент трения полозьев санок о снег равен k?

Ф266. U-образная трубка движется с постоянной скоростью v параллельно поверхности жидкости (рис. 4). Сечение нижней части трубки, опущенной в воду, равно S_1, а верхней, находящейся над водой, — S_2. Какая сила приложена к трубке? Плотность жидкости ρ. Трением и образованием волн на поверхности жидкости пренебречь.

Ф267. Космический корабль сферической формы движется вокруг Солнца по круговой орбите. Какова температура корабля, если энергия, излучаемая единицей площади поверхности Солнца и корабля, пропорциональна четвертой степени их абсолютных температур? Космонавты, которые находятся на корабле, видят Солнце в угле 30′. Температуру поверхности Солнца принять равной 6000 °К.

Решения задач

М200, М208-М210; Ф218-Ф222

М200. *а) На рисунке 1 изображены шесть точек, которые лежат по три на четырех прямых. Докажите, что можно 24 разными способами отобразить это множество из шести точек на себя так, чтобы каждые три точки, лежащие на одной прямой, отображались в три точки, также лежащие на одной прямой.*

б) На рисунке 2 девять точек лежат по три на девяти прямых, причем через каждую точку проходит по три таких прямых. Эти девять точек и девять прямых образуют знаменитую «конфигурацию Паскаля». Сколькими способами можно множество наших девяти точек отобразить на себя так, чтобы каждая тройка точек, лежащая на одной из девяти наших прямых, отображалась на тройку точек, которая тоже лежит на некоторой прямой из нашей конфигурации?

в) Тот же вопрос для конфигурации Дезарга (из десяти точек и десяти прямых), изображенной на рисунке 3.

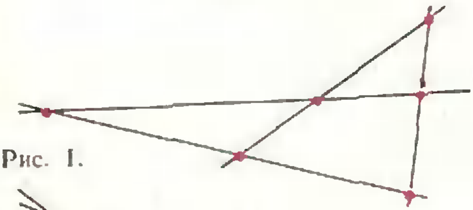


Рис. 1.

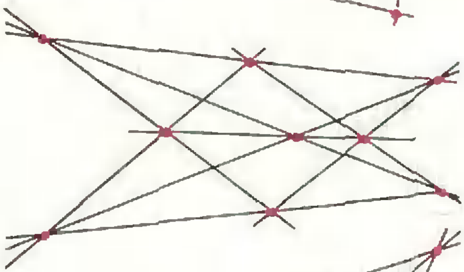


Рис. 2.

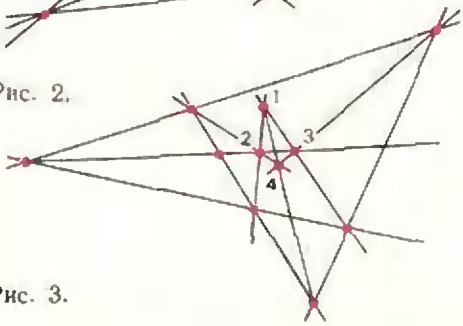


Рис. 3.

В пунктах б) и в) задачи значительно проще найти ответ, чем его обосновать.

Ответ можно получить так. Назовем *треугольником* тройку точек, не лежащих на одной прямой и таких, что каждые две из них лежат на одной прямой *), принадлежащей, разумеется, нашей конфигурации. Легко заметить, что если указано, какая точка переходит в каждую вершину данного треугольника (эти три точки тоже должны образовывать треугольник), то положение всех остальных точек благодаря нашему условию — три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, лежащие на одной прямой, — определяется однозначно во всех трех случаях: а), б), в).

Разберем для примера случай в). Пусть при отображении точки i, j, k перешли в точки 1, 2 и 3 соответственно. Тогда в точку 4 должна перейти та точка l, которая соединена прямыми с каждой из точек i, j, k, — две точки, лежащие на прямой, должны перейти в две точки, лежащие на прямой, — а в точки 5, 6, ..., 10 должны перейти третьи точки, лежащие на прямых, проходящих через пары точек i, j, k, l.

Поэтому в случае а) действительно есть 24 разных отображения: в первую вершину выделенного треугольника можно отобразить любую из шести точек, во вторую — любую из четырех точек, лежащих с ней на одной прямой, а точка, переходящая в третью вершину, определяется однозначно. Всего $6\cdot4=24$ отображения. Аналогично, в в пунктах б) и в) ответы: $9\cdot6\cdot2=108$ и $10\cdot6\cdot2=120$ (здесь в третью вершину треугольника может перейти не одна, а две точки). Однако обосновать наши подсчеты не просто: производя их, мы пользовались «равноправием» всех треугольников. Например, могло оказаться, что точки l, с которой соединены прямыми точки i, j, k, вообще нет или что таких точек две. Хотя это равноправие, по-видимому, имеется, его все же нужно доказать. Разумеется, это можно сделать «в лоб», взяв в случае а) 24 треугольника, в случае б) 108 треугольников, а в случае в) 120 треугольников (мы различаем треугольники с разным порядком вершин). Но можно поступить и по-другому. Поскольку для описания наших конфигураций существенно только, какие точки лежат на данной прямой и какие прямые проходят через данную точку, — именно эти сведения необходимы и достаточны для того, чтобы изучать отображения, — можно задавать наши конфигурации с помощью моделей: указать на-

*) Порядок точек, входящих в тройку, существен.

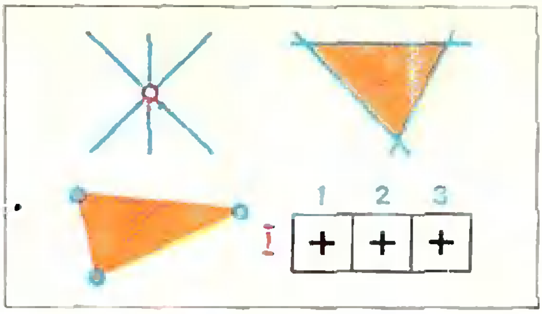


Рис. 4.

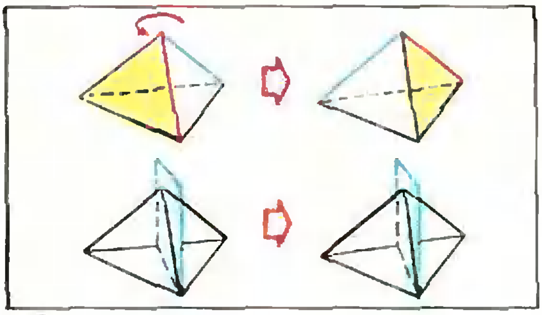


Рис. 5.

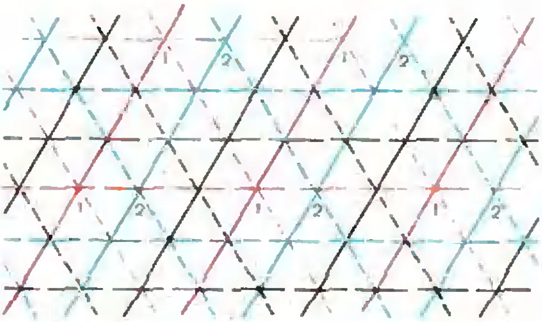


Рис. 6.

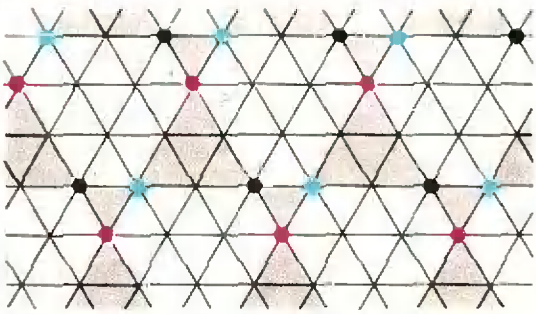


Рис. 7.

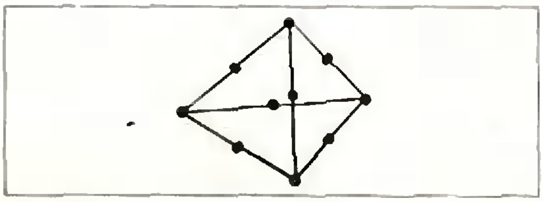


Рис. 8.

бор «прямых», «точек» и указать, какие точки и прямые *инцидентны*. Точка i и прямая j инцидентны, если точка i лежит на прямой j или, что то же самое, прямая j проходит через точку i. На рисунке 4 приведено несколько моделей одной и той же конфигурации.

Мы построим для каждой из конфигураций а), б), в) такие модели, для которых равноправие треугольников будет очевидным.

Пункт а). Рассмотрим тетраэдр — правильную треугольную пирамиду — и назовем прямыми его вершины, а точками — ребра. Скажем, что точка i инцидентна прямой j, если вершина j инцидентна ребру i. Проверьте, что получилось модель конфигурации пункта а). Треугольникам в этой модели отвечают три ребра, прилегающие к одной грани, а нашим отображениям — повороты и симметрии тетраэдра. Эти преобразования показаны на рисунке 5. Проверьте, что они переводят три точки, лежащие на одной прямой, в три точки, лежащие на одной прямой. В этой модели равноправие всех треугольников очевидно.

Конфигурация Паскаля. Модель конфигурации Паскаля будет несколько более замысловатой. Рассмотрим сетку из правильных треугольников, образованную тремя семействами параллельных прямых (см. рис. 6). Изготовим «точки» и «прямые» из прямых и узлов этой сетки следующим образом. Объединим все параллельные прямые через три в одну «прямую» и, аналогично, все узлы, находящиеся на прямых, через три объединим в одну «точку». На рисунке 6 узлы, входящие в одну «точку», занумерованы одинаково, а прямые, входящие в одну «прямую», имеют один и тот же цвет. «Точка» и «прямая» инцидентны, если инцидентны составляющие их узлы и прямые.

Упражнение. Убедитесь, что получилась модель конфигурации Паскаля.

Треугольнику в модели отвечает набор треугольников, изображенный на рисунке 7. Легко убедиться, что повороты, параллельные переносы и симметрии плоскости, переводящие сетку в себя, являются допустимыми *) отображениями. Поэтому равноправие всех треугольников очевидно — любой треугольник можно перевести в любой другой с помощью допустимого отображения.

Упражнение. Докажите, что других допустимых отображений нет.

Конфигурация Дезарга. Конфигурацию Дезарга мы представим следующим образом. Возьмем тетраэдр и отметим середины его ребер (см. рис. 8). Точками назовем вершины тетраэдра и середины его ребер, а прямыми — его ребра и середины ребер, лежащих в одной грани. Прямой-ребру принадлежат лежащие на нем вершины и его середина.

*) Так для краткости мы будем называть отображения, удовлетворяющие условиям задачи.

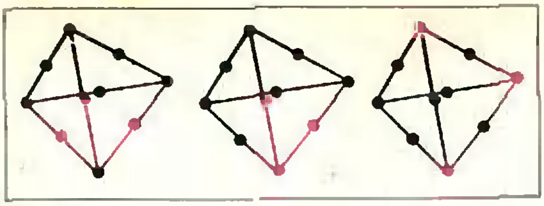


Рис. 9.

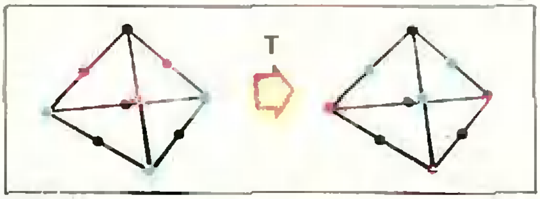


Рис. 10.

Упражнение. Убедитесь, что получилась модель конфигурации Дезарга.

Какие тройки точек нашей модели являются треугольниками? Это вершины, лежащие в одной грани, или вершина и середины прилегающих к ней ребер, или середины ребер, прилегающих к одной вершине (см. рис. 9). Хотя с точки зрения обычных преобразований тетраэдра — поворотов и симметрий (см. рис. 5) — эти треугольники не равноправны, достаточно добавить еще одно преобразование T (оно показано на рисунке 10), чтобы убедиться в равноправности всех треугольников и тем самым в правильности ответа.

Упражнение. Убедитесь, что повороты, симметрии и отображение T являются допустимыми отображениями. Укажите все допустимые отображения.

Задача решена.

В заключение еще несколько вопросов для самостоятельного продумывания. Сколько существует допустимых отображений наших конфигураций, оставляющих неподвижными:

а) данную точку;

б) данную пару точек;

в) данную прямую (то есть отображений, переставляющих точки, лежащие на данной прямой);

г) данную пару прямых и т. п.?

М208. *Известно, что разность между наибольшим и наименьшим из вещественных чисел*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{10}$$

равна 1. *Какой:*

а) наибольшей;

б) наименьшей

— может быть разность между наибольшим и наименьшим из 10 *чисел*

$$x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \ldots,\ \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}?$$

Каков будет ответ, если чисел не 10, *а n?*

Будем решать задачу сразу для n чисел. Сделаем несколько предварительных замечаний.

Обозначим через y_k число $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}$, где $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Если прибавить ко всем x_i некоторое число a, то вместо чисел y_i мы получим числа y_i+a. Максимальные разности для чисел y_i и для чисел y_i+a совпадают. Поэтому от набора $\{x_i\}$ с помощью подходящего выбора a можно перейти к такому набору $\{x_i'\}$, что все $x_i'\geqslant 0$, наименьшие x_i равны нулю, а наибольшие — единице. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие наборы. Аналогично, если заменить числа x_i на $1-x_i$, то y_i заменятся на $1-y_i$. Следовательно, от набора $\{x_i\}$ можно перейти к набору $\{1-x_i\}$: максимальные разности между числами y_i и числами $1-y_i$ одинаковы.

Решим теперь задачу а). Пусть y_k — наименьшее, а y_l — наибольшее из чисел $\{y_i\}$. Если $k<l$, то

$$y_l-y_k=\frac{ky_k}{l}+\frac{x_{k+1}+\cdots+x_l}{l}-$$
$$-y_k=\frac{x_{k+1}+\cdots+x_l}{l}-\frac{l-k}{l}y_k\leqslant$$
$$\leqslant\frac{x_{k+1}+\cdots+x_l}{l}\leqslant\frac{l-k}{l}=1-\frac{k}{l}\leqslant$$
$$\leqslant 1-\frac{1}{n}.$$

Если же $l>k$, то $y_l-y_k=\dfrac{k-l}{k}y_l-$ $-\dfrac{y_{l+1}+\ldots+y_k}{k}\leqslant 1-\dfrac{l}{k}\leqslant 1-\dfrac{1}{n}$. Следовательно, максимальная разность не больше $1-\dfrac{1}{n}$. Набор с такой разностью легко указать: $x_1=0,\ x_2=x_3=\ldots=x_n=1$.

Перейдем к решению задачи б). Оценим, чему равна максимальная разность, если в наборе $\{x_i\}$ $x_k=1,\ x_l=0$. Будем считать, что $k<l$ (если это не так, то от набора $\{x_i\}$ перейдем к набору $\{1-x_i\}$). Если $k=1$, то разность не меньше $\dfrac{1}{n}$. Действительно, тогда $y_1=1$, а $y_n=$ $=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\leqslant\dfrac{n-1}{n}$, поскольку все $x_i\leqslant 1$, а один из них равен нулю. Пусть $k>1$. Тогда $\Delta_1=y_k-y_{k-1}=$ $=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{y_k}{k-1}$, $\Delta_2=y_{l-1}-y_l=$ $=\dfrac{y_{l-1}}{l}$, и если $y_k\leqslant y_{l-1}$, то $\Delta_2\geqslant\dfrac{y_k}{l}$.

Наибольшие из чисел Δ_1 и Δ_2 не меньше $\frac{1}{k+l-1}$, поскольку $1\leqslant(k-1)\Delta_1+l\Delta_2\leqslant(k+l-1)M$, где $M=\max(\Delta_1, \Delta_2)$. Если же $y_k>y_{l-1}$, то рассмотрим еще разность $\Delta_3=y_k-y_l=y_k-y_{l-1}+\frac{y_{l-1}}{l}$. $l\Delta_3+(k-1)\Delta_1=(l-1)(y_k-y_{l-1})+1>1$, откуда $\max(\Delta_1, \Delta_3)\geqslant\frac{1}{k+l-1}$. Итак мы доказали, что разность не меньше $\frac{1}{k+l-1}$. Поэтому для произвольного набора она не меньше $\frac{1}{2(n-1)}$ $(l\leqslant n,\ k\leqslant n-1)$. Такую разность реализовать можно: достаточно, например, рассмотреть набор $x_1=x_2=\ldots=x_{n-2}=\frac{1}{2}$, $x_{n-1}=1$, $x_n=0$. Итак, наименьшая разность равна $\frac{1}{2(n-1)}$.

Л. Г. Лиманов

М209. *Для любого треугольника ABC можно вычислить такую сумму:*

$$S=\operatorname{tg}^2 A/2+\operatorname{tg}^2 B/2+\operatorname{tg}^2 C/2.$$

Докажите что

а) $S\leqslant 2$ для всех остроугольных и прямоугольных треугольников;

б) $S\geqslant 2$ для тупоугольных треугольников с тупым углом, большим или равным $2\operatorname{arctg} 4/3$;

в) среди треугольников с тупым углом φ таким, что $\frac{\pi}{2}<\varphi<2\operatorname{arctg} 4/3$, имеются и такие, что $S>2$, и такие, что $S<2$.

Приведем одно из наиболее коротких решений, близкое к присланным *С. Берколайко* (Белгородская обл.) и *А. Григоряном* (Баку).

Из формулы

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$$

следует, что положительные числа x, y и z могут служить тангенсами половин углов ΔABC в том и только том случае, когда

$$xy+yz+zx=1. \qquad (1)$$

Тождество (1) позволяет вместо суммы $S=x^2+y^2+z^2$ рассматривать более простую сумму $T=x+y+z$: поскольку $T^2=S+2$, то условия $S>2$, $S=2$ и $S<2$ равносильны соответственно условиям $T>2$, $T=2$ и $T<2$.

Задача сводится, таким образом, к следующей.

Пусть $xy+yz+zx=1$, $x+y+z=T$, $0<x\leqslant z$, $0<y\leqslant z$. Тогда

а) $T\leqslant2$ при $z\leqslant1$,

б) $T\geqslant2$ при $z\geqslant4/3$,

в) для всякого z между 1 и 4/3 найдутся и такие x, y, что $T<2$, и такие x, y, что $T>2$.

Докажем утверждения а), б) и в).

а) Если $z\leqslant1$, то $S=x^2+y^2+z^2\leqslant xz+yz+z^2<xy+xz+yz+z^2=1+z^2\leqslant2$, так что и $S<2$, и $T<2$.

б) Если $z=\frac{4}{3}+d$, $d\geqslant0$, то $x+y\geqslant\frac{2}{3}-d$.

Докажем это от противного: предположим что $x+y<\frac{2}{3}-d$.

Тогда

$$xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}<\frac{1}{9}-\frac{d}{3}+\frac{d^2}{4},$$

$$(x+y)z<\left(\frac{2}{3}-d\right)\left(\frac{4}{3}+d\right)=\frac{8}{9}-\frac{2d}{3}-d^2,$$

так что

$$1=xy+(x+y)z<1-d-\frac{3d^2}{4}\leqslant1.$$

Полученное противоречие доказывает, что $x+y\geqslant\frac{2}{3}-d$, и $T=(x+y)+z\geqslant\frac{2}{3}-d+\frac{4}{3}+d=2$.

в) Пусть теперь $1<z<\frac{4}{3}$.

Сначала найдем такие x и y, что $T<2$. Возьмем $x=y$. Согласно тождеству (1) тогда $x=y=\sqrt{z^2+1}-z$, $T=2\sqrt{z^2+1}-z$. Так как $z<4/3$, то $3z^2<4z$, $4(z^2+1)<4+4z+z^2$, $2\sqrt{z^2+1}<z+2$, и значит, $T<2$.

Замечание. Вернувшись к исходной формулировке задачи, мы видим, что для равнобедренных тупоугольных треугольников с тупым углом $\varphi<2\operatorname{arctg}4/3$ сумма $S<2$.

Теперь найдем такие x и y, что $T>2$. Используя тождество (1), запишем T в виде $T=(x+y)+z=\frac{1-xy}{z}+z$.

Сумма $z+\frac{1}{z}>2$, T отличается от нее на величину $\frac{xy}{z}$. Так как $y\leqslant z$, то $\frac{xy}{z}\leqslant x$.

Значит, если взять $x<z+\frac{1}{z}-2$, то T ока-

жется больше 2. Остается только проверить, что действительно существует x и y, удовлетворяющие условиям $0<x\leqslant z$, $0<y\leqslant z$,

$$xy+yz+zx=1 \text{ и } x<z+\frac{1}{z}-2. \quad (2)$$

Воспользуемся тем, что $z>1$ (отметим, что при $z\leqslant 1$ таких x и y не существует, — это следует, например, из пункта а). Согласно (1) $y=\frac{1-xz}{x+z}$. При $z>1$ и при $0<x<\frac{1}{z}$, очевидно, $0<y<1$. Итак, для любого $x>0$ такого, что $x<\frac{1}{z}$ и $x<z+\frac{1}{z}-2$, при $y=\frac{1-xz}{x+z}$ условия (2) выполняются. Таким образом, при $1<z<4/3$, если $0<x<z+\frac{1}{z}-2$ и $y=\frac{1-xz}{x+z}$, то $T>2$. Задача решена.

Геометрический смысл. Построим три окружности α, β, и γ с центрами A, B и C, которые попарно касаются друг друга внешним образом.

При $S<2$ существует одна окружность δ, которая касается α, β и γ внешним образом, и одна окружность ε, которой α, β и γ касаются изнутри.

При $S>2$ две окружности δ_1 и δ_2 касаются α, β и γ внешним образом и нет ни одной окружности, которой α, β и γ касались бы изнутри.

Случай $S=2$—переходный: одна окружность δ касается α, β, γ внешним образом, кроме того α, β и γ имеют общую касательную.

Доказательство этих утверждений можно найти в статье «Сюрпризы» («Квант», 1974, № 1).

М. Л. Гервер

М210. *Рассмотрим последовательности, состоящие из 3000 цифр 1 и 2. В такой последовательности разрешается поменять местами любые две соседние тройки цифр. Две последовательности называются эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько всего существует неэквивалентных последовательностей?*

Решим задачу для последовательностей из $3n$ цифр. Чтобы не возникло путаницы, греческими буквами будем обозначать последовательности, а латинскими — элементы последовательностей. Пусть последовательность α состоит из $3n$ цифр

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{3n}\}.$$

Разобъем α на три подпоследовательности:

$$\alpha_1=\{a_1, a_4, a_7, \ldots, a_{3k+1}, \ldots, a_{3(n-1)+1}\},$$

$$\alpha_2=\{a_2, a_5, a_8, \ldots, a_{3k+2}, \ldots, a_{3(n-1)+2}\},$$

$$\alpha_3=\{a_3, a_6, a_9, \ldots, a_{3k}, \ldots, a_{3n}\}.$$

Такое разбиение будем называть *стандартным*. Каждая из последовательностей α_1, α_2, α_3 стандартного разбиения состоит из n цифр. Пусть β — произвольная последовательность. Через $|\beta|$ обозначим число единиц в последовательности β.

Подсчет числа неэквивалентных последовательностей основывается на следующей теореме:

Теорема. *Пусть α и β — две последовательности длины $3n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — их стандартные разбиения.*

Для того чтобы последовательности α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы подпоследовательности α_1 и β_1, α_2 и β_2, α_3 и β_3 содержали одинаковое число единиц соответственно, то есть чтобы выполнялось условие

$$|\alpha_1|=|\beta_1|,\quad |\alpha_2|=|\beta_2|,\quad |\alpha_3|=|\beta_3|. \quad (1)$$

Покажем сначала, как на основе этой теоремы подсчитывается число неэквивалентных последовательностей, а затем докажем теорему.

В силу теоремы каждый класс эквивалентных последовательностей однозначно определяется упорядоченной тройкой чисел $(|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|)$. Эти числа могут принимать любые значения от 0 до n. Следовательно, число неэквивалентных последовательностей длины $3n$ равно числу различных упорядоченных троек целых чисел от 0 до n. Нетрудно видеть, что число таких троек равно $(n+1)^3$.

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть мы переставили в последовательности $\alpha=\{a_1, a_2, \ldots a_{3n}\}$ две соседние тройки цифр: a_k, a_{k+1}, a_{k+2} и $a_{k+3}, a_{k+4}, a_{k+5}$. Эту перестановку можно представить следующим образом: сначала поменяли местами цифры a_k и a_{k+3}, затем поменяли местами цифры a_{k+1} и a_{k+4} и, наконец, поменяли местами цифры a_{k+2} и a_{k+5}. Числа a_k и a_{k+3} — соседние цифры одной и той же подпоследовательности стандартного разбиения α; числа a_{k+1} и a_{k+4} — другой, а числа a_{k+2} и a_{k+5} — третьей. Таким образом, в каждой из подпоследовательностей α_1, α_2, α_3 стандартного разбиения α мы переставили два соседних члена. Значит, если последовательность β получена из последовательности α конечным числом перестановок, то есть, если последовательности α и β эквивалентны, то подпоследовательности β_1, β_2, β_3 стандартного разбиения β суть некоторые перестановки подпоследовательностей α_1, α_2, α_3 соответственно. Отсюда вытекают равенства (1).

Достаточность. Нам надо доказать, что если последовательности α и β длины $3n$ удовлетворяют условию (1), то эти последовательности эквивалентны. Удобнее доказывать более общее утверждение: если последовательности α и β длины k удовлетворяют условию (1), то эти последовательности эквивалентны. Доказательство будем вести индукцией по k.

1) При $k=1$ последовательности α и β содержат по одной цифре. Из условия (1) следует, что эти цифры равны, то есть что последовательности α и β просто совпадают.

2) Предположим, что в случае, когда $k=p$, утверждение уже доказано. Докажем его при $k=p+1$. Итак, пусть α и β — последовательности длины $p+1$ и пусть выполнено соотношение (1). Пусть, далее, последовательность α состоит из цифр $\{a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}\}$, а последовательность β — из цифр $\{b_1, b_2, \ldots, b_{p+1}\}$.

а) если $a_1=b_1$, то рассмотрим последовательности $\alpha'=\{a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}\}$ и $\beta'=\{b_2, b_3, \ldots, b_{p+1}\}$. Ясно, что последовательности α' и β' удовлетворяют условию (1). А так как длины этих последовательностей равны p, то можно воспользоваться индуктивным предположением. Таким образом, последовательности α' и β' эквивалентны, то есть последовательность α' несколькими перестановками можно перевести в последовательность β'. Эти же перестановки переводят α в β. Значит, последовательности α и β эквивалентны.

б) Пусть $a_1 \neq b_1$, и пусть для определенности $a_1=1$, а $b_1=2$. Так как $a_1=1$, то $|\alpha_1|>0$. Тогда в силу (1) и $|\beta_1|>0$. Следовательно, найдется число q такое, что $b_{3q+1}=1$. В последовательности β поменяем местами соседние тройки цифр b_{3q+1}, b_{3q+2}, b_{3q+3} и $b_{3(q-1)+1}$, $b_{3(q-1)+2}$, $b_{3(q-1)+3}$. В результате этой перестановки тройка b_{3q+1}, b_{3q+2}, b_{3q+3} сдвинется на 3 цифры влево. Затем поменяем местами эту тройку с рядом стоящей тройкой цифр $b_{3(q-2)+1}$, $b_{3(q-2)+2}$, $b_{3(q-2)+3}$ и так далее; после q перестановок получим последовательность β'', первой цифрой которой будет b_{3q+1}, то есть 1. Последовательности β и β'' эквивалентны и поэтому, как было доказано выше, удовлетворяют условию (1). Значит, последовательности α и β'' удовлетворяют условию (1). Но первые элементы этих последовательностей совпадают. Таким образом, случай б) свелся к уже разобранному случаю а). Теорема доказана.

Желающие могут попытаться решить задачу в еще более общем виде:

В последовательностях, состоящих из цифр 1 и 2, разрешается менять местами любые две рядом стоящие подпоследовательности длины k. Сколько существует неэквивалентных последовательностей, состоящих из n цифр ($n \geq k$)?

Ответ: если $n=mk+q$, где $0 \leq q < k$, то число неэквивалентных последовательностей равно $(m+1)^{k-q}(m+2)^q$.

Г. А. Гуревич

Правильные решения задач М206 — М215 прислали (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи): *А. Абдуррахманов* (Баку) **13**; *С. Абрамов* (Москва) **06**; *П. Агаронов* (Баку) **11, 14**; *С. Агеев* (Воронеж) **09, 11—14**; *Д. Азов* (Челябинск) **11**; *Г. Айрапетян* (Ереван) **13**; *С. Актершев* (Магнитогорск) **06**; *Ю. Акутин* (Москва) **12**; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) **13**; *В. Ашихмин* (Таллин) **12, 13**; *В. Бакиров* (Куйбышев) **12**; *П. Баньковский* (Уральск) **11—14**; *А. Бараов* (Москва) **11—13**; *А. Барсуков* (Пятигорск) **12**; *В. Басманов* (Воронеж) **11, 13**; *Л. Басов* (Пржевальск) **13**; *И. Бахмутский* (Львов) **13, 14**; *С. Белолипецкий* (Киржач Владимирской обл.) **06, 13, 14**; *А. Берлин* (Бобруйск) **12—15**; *Р. Бесчоков* (с. Старый Урух КБАССР) **13**; *Л. Блаженова* (Москва) **13, 14**; *А. Блох* (Харьков) **06, 09, 13, 14**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **13**; *А. Брысьев* (Тюльган Оренбургской обл.) **11—13**; *А. Валовой* (Москва) **13, 14**; *А. Вальков* (Ташкент) **06, 11—14**; *Р. Вассерман* (Одесса) **06, 09, 11—14**; *А. Векслер* (Ташкент) **11, 13**; *А. Волков* (Челябинск) **06, 14**; *В. Гаврин* (Ковылкино Морд. АССР) **06**; *В. Гаделия* (Очамчира Абхаз. АССР) **13**; *В. Гармаев* (Мирный) **13**; *Д. Гашибаязов* (Тбилиси) **13**; *Я. Гедеок* (Жидачев Львовской обл.) **12**; *С. Глазков* (Златоуст Челябинской обл.) **13, 14**; *Т. Говорова* (Симферополь) **11—13**; *И. Голдовский* (Брянск) **13**; *Л.* и *М. Гондельсман* (Ленинград) **06**; *А. Гончаров* (Никополь) **06, 11, 12, 14, 15**; *Е. Горбатый* (Одесса) **06**; *А. Гордон* (Москва) **13**; *С. Горшков* (Москва) **06, 07**; *М. Грабельковский* (Воронеж) **12**; *А. Григорян* (Баку) **06—11, 13**; *А. Гринберг* (Кишинев) **13**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **13, 14**; *Е. Гугель* (Днепропетровск) **13**; *А. Гулиев* (с. Сулейманлы Аз. ССР) **14**; *Б. Гуревич* (Воронеж) **11, 12**; *Г. Гутин* (Клинцы Брянской обл.) **11**; *М. Данилян* (Баку) **12, 13**; *В. Данилов* (Москва) **11—14**; *К. Данильченко* (Волгоград) **06, 11, 13**; *С. Даркембаев* (с. Сара-Джак Алма-Атинской обл.) **11, 13, 14**; *П. Дедик* (Москва) **06, 08, 11—14**; *А. Деревягин* (Красноярск) **13**; *Э. Дяченко* (Киев) **11, 13**; *Р. Егорян* (Раздан) **12, 14**; *А. Еременко* (Харьков) **11, 12, 14**; *А. Журавлев* (Москва) **07, 12**; *М. Закс* (Пермь) **06, 11—14**; *В. Зарубин* (Москва) **06, 07, 13**; *Д. Зелевинский* (Москва) **13, 14**; *С. Зенович* (Ташкент) **07, 13**; *П. Зозуль* (п. Гребенки Киевской обл.) **14**; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) **13**; *А. Иванов* (Москва) **11, 12**; *А. Иванов* (Хабаровск) **13**; *Т. Иванова* (Москва) **11, 13**; *А. Измайлов* (Баку) **13**; *С. Ильинков* (Харьков) **11—14**; *И. Иовик* (Магнитогорск) **13**; *А. Калюжный* (Киев) **11, 13**; *М. Кангиев* (Самарканд) **13**; *П. Кацыло*

(Москва) 11, 14; *И. Кирова* (Болгария) 13; *И. Клевчук* (с. Ставчаны Черновицкой обл.) 11; *М. Кобозев* (Киев) 14; *В. Кобылецкий* (Баку) 11—13; *Е. Ковкрак* (д. Рудня-Журавлева Гомельской обл.) 13; *А. Колодин* (Коломыя Ивано-Франковской обл.) 12, 13; *В. Конев* (Ангарск) 13; *А. Корлат* (с. Чугулены МССР) 13, 14; *С. Коршунов* (Моннно Московской обл.) 06, 09, 11—14; *В. Костанян* (Москва) 13; *А. Костюнин* (Люберцы Московской обл.) 12; *А. Котанов* (п. Цалка ГССР) 13; *А. Котенко* (с. Березовая Рудка Полтавской обл.) 13; *А. Кошутин* (Челябинск) 14; *А. Кукуш* (Киев) 09, 12—14; *А. Кумахов* (с. Лескен КБАССР) 11—13; *М. Левин* (Витебск) 12, 13; *А. Легостев* (Москва) 11; *С. Лифиц* (Харьков) 11, 12; *М. Любич* (Харьков) 06, 07, 10, 11, 13, 14; *Е. Мазур* (Дербент) 07; *А. Макаричев* (Львов) 06, 12—14; *С. Макаров* (Саратов) 11, 13, 14; *С. Малинский* (Полтава) 14; *В. Мацукатов* (п. Цалка ГССР) 13; *С. Мельник* (Харьков) 06, 07, 09; *А. Мехович* (Владивосток) 13; *В. Мильман* (Минск) 11, 12, 14, 15; *А. Мирошниченко* (Харьков) 13, 14; *А. Михеев* (Шахты) 13; *А. Михлин* (Курск) 11, 12; *Ю. Муранов* (Москва) 11—14; *Р. Мусин* (с. Никитино Оренбургской обл.) 13; *Г. Мустафаев* (Сиазань Аз. ССР) 06, 11, 13, 14; *И. Муха* (Тернополь) 12, 13; *А. Навасардян* (Ереван) 13; *Ю. Неретин* (Москва) 06, 08, 11, 13—15; *А. Николаев* (Москва) 06, 11, 12; *Б. Ниязбеков* (Алмалык Ташкентской обл.) 13; *И. Новиков* (Куйбышев) 06, 11; *С. Нужный* (Куйбышев) 11—14; *С. Охитин* (Оренбург) 11—13; *И. Панин* (Апатиты) 11, 12; *П. Парамонов* (Москва) 09, 11—13; *Е. Пасике* (Харьков) 06, 11, 13, 14; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) 12—15; *А. Поносов* (Пермь) 06, 08; *Р. Портной* (Черновцы) 12; *Д. Поцхишвили* (Тбилиси) 11; *Ю. Протас* (Кагул МССР) 13, 14; *С. Путинцев* (Кемерово) 06, 11—15; *А. Разгуляев* (Клин Московской обл.) 06, 12; *А. Рашковский* (Харьков) 06, 12, 13; *А. Резников* (Киев) 11, 12, 14; *С. Родионов* (Саратов) 13, 14; *Р. Рожков* (Москва) 08, 11—14; *Ф. Рожков* (Рязань) 08, 11—14; *Б. Розенштейн* (Каменец-Подольский) 06; *Д. Ромашов* (с. Галкино Курганской обл.) 13, 14; *А. Рубашевский* (Киев) 12; *Л. Рубинштейн* (Калининград) 13, 14; *А. Рязанов* (Новокузнецк) 06, 11, 12; *Ш. Сайнароев* (ст. Наурская ЧИАССР) 13; *П. Самовол* (Гайворон Кировоградской обл.) 12, 13; *М. Сапир* (Свердловск) 11—14; *С. Сатановский* (Харьков) 11, 13; *В. Сац* (Киев) 13, 14; *Т. Сельбирак* (Польша) 11—14; *В. Семененко* (Ставрополь) 13; *В. Семенов* (Чебоксары) 13; *А. Симонян* (Фрунзе) 13; *Г. Скляр* (Харьков) 06, 10—15; *С. Скоков* (д. Соковнн, г. Слободской) 14; *В. Слепой* (Фрунзе) 13; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) 09, 11—14; *Ф. Смирнов* (Ленинград) 06; *Г. Сорокин* (Актюбинск) 12—14; *С. Табачников* (Москва) 06, 08, 09, 11—13; *Т. Талько* (п/о Оленья губа Мурманской обл.) 13; *С. Тваури* (п. Ленингори ГССР) 14; *А. Тверской* (Москва) 06, 14; *К. Тевосян* (Абовян Арм. ССР) 13; *В. Ти* (Кировабад) 06, 13; *Н. Тимиров* (Азнакаево ТАССР) 13; *А. Ткач* (Каменец-Подольский Хмельницкой обл.) 11; *Г. Токарев* (Тула) 14; *М. Торонджадзе* (Тбилиси) 11; *А. Гралле* (Минск) 13; *А. Троценко* (с. Березовая Рудка Полтавской обл.) 13; *Э. Туркевич* (Черновцы) 06, 11, 13—15; *А. Тяпин* (Москва) 11, 13—15; *М. Уридия* (Тбилиси) 11; *В. Урываев* (Москва) 12, 13; *В. Филоненко* (Днепропетровск) 13; *С. Финашин* (Ленинград) 06, 11, 12; *Т. Фисенко* (Грозный) 13; *А. Фридман* (Рига) 11, 12; *Р. Хизанишвили* (Тбилиси) 11; *А. Хомич* (Брест) 11, 12; *М. Хорошин* (Чернигов) 14; *С. Цветцих* (п/о Стрелково Московской обл.) 12; *С. Церковный* (Ленинград) 13, 14; *И. Цукерман* (Ленинград) 06, 11, 13; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) 13; *Я. Чепулионите* (Кайшадорский р-н Лит. ССР) 13; *А. Черебитов* (Омск) 06, 11, 12, 14; *А. Чернявский* (Харьков) 14; *Л. Черняева* (Воркута) 13; *В. Чернякин* (с. Березовая Рудка Полтавской обл.) 13; *В. Шапкин* (Октябрьский БАССР) 13; *К. Шварцман* (Кишинев) 13; *А. Шерстюк* (Николаев) 06, 10; *В. Шкатов* (Одинцово Московской обл.) 13; *Ю. Шмелев* (Ярославль) 06, 07, 11—13; *Н. Щербина* (Днепропетровск) 06, 07, 09; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) 09, 13, 14; *В. Щипанонов* (Ковылкино) 06; *А. Эстерлис* (Тбилиси) 13; *Р. Юлмухаметов* (д. Иткулово БАССР) 12, 13; *И. Юнус* (Харьков) 06, 07, 09, 11, 13—15; *Б. Юсин* (Москва) 06, 10; *А. Яблонский* (Волгоград) 13; *Р. Ямилев* (Уфа) 09, 11, 13, 14.

Ю. П. Лысов

Ф218. *Железнодорожный состав идет с постоянной скоростью $v = 72$ км/ч по горизонтальному участку пути. На сколько должна измениться мощность, развиваемая локомотивом, чтобы состав с той же скоростью продолжал двигаться во время сильного вертикального дождя? Считать, что каждую секунду на состав падает $m = 100$ кг воды, которая затем стекает на землю по стенкам вагонов. Изменением сил трения пренебречь.*

Будем решать задачу в системе отсчета, связанной с землей. Вода, стекающая на землю, имеет горизонтальную составляющую скорости, равную скорости поезда. Поэтому горизонтальная составляющая импульса воды, стекающей на землю за время Δt, равна $(\mu\Delta t)\,v$, где $\mu = 100$ кг/с — масса воды, стекающей на землю за 1 секунду. При падении же воды на состав горизонтальная составляющая ее импульса равна нулю. Таким образом, поезд за время Δt передает воде импульс

$$\mu v\Delta t - 0 = \mu v\Delta t.$$

Это означает, что на воду со стороны поезда и, согласно третьему закону Ньютона, на поезд со стороны воды действует сила, равная по абсолютной величине

$$F = \frac{\Delta (mv)}{\Delta t} = \mu v.$$

Следовательно, чтобы скорость поезда не изменилась, именно на величину силы F и должна возрасти сила тяги локомотива во время дождя. А его мощность должна возрасти на

$$\Delta N = Fv = \mu v^2 = 4\cdot 10^4 \text{ (вт)}.$$

Ф219. *В вертикальном цилиндре имеется n молей идеального одноатомного газа. Цилиндр закрыт сверху поршнем массы M и площади S. Вначале поршень удерживался неподвижным, газ в цилиндре занимал объем V_0 и имел температуру T_0. Затем поршень освободили, и после нескольких колебаний он пришел в состояние покоя. Пренебрегая в расчетах всеми силами трения, а также теплоемкостью поршня и цилиндра, найти температуру и объем газа при новом положении поршня. Вся система теплоизолирована. Атмосферное давление равно $p_а$.*

В начальный момент (сразу после того, как поршень освободили) на поршень действуют три силы: сила тяжести и сила атмосферного давления, направленные вниз, и сила давления газа в цилиндре, направленная вверх. Если равнодействующая всех сил направлена вниз, то поршень начнет двигаться вниз, если же равнодействующая направлена вверх, поршень будет подниматься вверх.

Для определенности будем считать, что поршень смещается вниз. Запишем уравнение состояния газа в цилиндре при равновесном положении поршня:

$$pV = nRT.$$

Из условия равновесия поршня

$$p = p_а + \frac{Mg}{S}.$$

Поэтому

$$\left(p_а + \frac{Mg}{S}\right) V = nRT. \qquad (1)$$

Мы получили уравнение, связывающее V и T. Однако для того чтобы найти V и T, необходимо иметь еще одно уравнение. Его можно получить, воспользовавшись законом сохранения энергии. Так как сосуд теплоизолирован, а силы трения и теплоемкость поршня и цилиндра пренебрежимо малы, то работа, совершенная над газом, равна изменению его внутренней энергии:

$$A = \Delta U.$$

Как известно, внутренняя энергия одного моля идеального одноатомного газа равна

$$U = \frac{3}{2} RT,$$

где R — универсальная газовая постоянная. Внутренняя энергия n молей равна $\frac{3}{2}nRT$, а изменение внутренней энергии газа при изменении его температуры от T_0 до T равно

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(T - T_0).$$

Теперь найдем работу по сжатию газа. Эта работа совершается силой атмосферного давления и силой тяжести. Поэтому она равна

$$A = (p_а S + Mg)\ h,$$

где $h = \dfrac{V_0 - V}{S}$ —расстояние, на которое сместился поршень. Таким образом,

$$\frac{3}{2} nR(T - T_0) = \left(p_а + \frac{Mg}{S}\right)(V_0 - V). \qquad (2)$$

Заметим, что если поршень движется вверх, газ сам совершает работу против атмосферного давления и веса поршня, при этом его внутренняя энергия уменьшается. Равенство (2) остается справедливым и в этом случае.

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$T = \frac{3}{5} T_0 + \frac{2}{5} \frac{\left(p_а + \frac{Mg}{S}\right) V_0}{nR},$$

$$V = \frac{2}{5} V_0 + \frac{3}{5} \frac{nRT_0}{p_а + \frac{Mg}{S}}.$$

Ф220. *Экран освещается параллельным пучком лучей, перпендикулярным плоскости экрана. Как изменится освещенность экрана, если на пути света поставить призму ABC с малым углом раствора α и показателем преломления n, причем грань AB параллельна экрану (рис. 11, а)? Отражением света от призмы пренебречь.*

Световые лучи, попавшие на призму, преломляются на ее грани BC и попадают на участок экрана DF (рис. 11, б). При этом на участок GD световые лучи совсем не попадают, поэтому его освещенность равна нулю, а участок EF освещается как прямыми лучами, так и лучами, прошедшими через призму.

Найдем сначала освещенность участка DE, куда попадают только преломленные призмой лучи. Если освещенность призмы и экрана прямыми лучами обозначить E_0, то через призму проходит световой поток $\Phi = E_0 \cdot AB \cdot d$ ($AB \cdot d$ — площадь грани AB). Попадая на участок экрана DF, этот световой поток распределяется по нему равномерно (так как лучи и после призмы идут параллельным пучком) и создает освещенность

$$E = \frac{\Phi}{DF \cdot d} = E_0 \frac{AB}{DF}$$

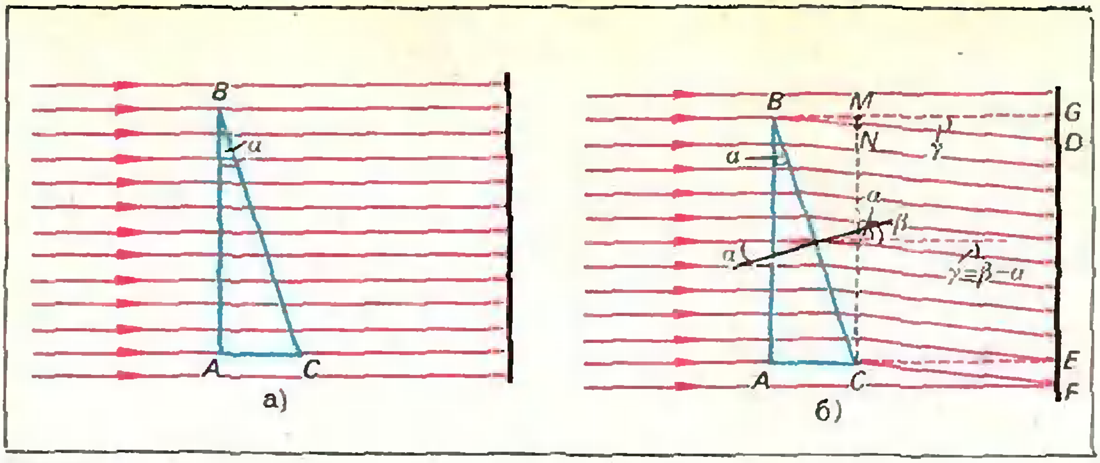


Рис. 11.

($DF \cdot d$ — площадь соответствующего участка экрана).

Из рисунка 11, *б*: $DF = NC = MC - MN$. Но $MC = AB$, а $MN = BM \operatorname{tg}\gamma = AB \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma$. Поэтому $DF = AB - AB \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma = AB\,(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma)$ и

$$\frac{AB}{DF} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma}.$$

Углы α и γ не независимы: $\gamma = \beta - \alpha$, где β — угол преломления лучей. Из закона преломления света $\sin\beta = n \sin\alpha$, то есть $\beta = \arcsin(n \sin\alpha)$. Так как угол α мал, а величина n обычно порядка 1, то можно считать, что $\beta = \arcsin(n\alpha) = n\alpha$. Тогда

$$\gamma = n\alpha - \alpha = \alpha(n-1).$$

Следовательно,

$$\frac{AB}{DF} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma} = \frac{1}{1-\alpha\gamma} = \frac{1}{1-(n-1)\alpha^2}$$

и

$$E = E_0 \frac{AB}{DF} = E_0 \frac{1}{1-(n-1)\alpha^2}.$$

Таким образом, на участке DE освещенность увеличилась в

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{1-(n-1)\alpha^2} \text{ раз},$$

а на участке EF — в

$$\frac{E_0 + E}{E_0} = 1 + \frac{1}{1-(n-1)\alpha^2} \text{ раз}.$$

Ф221. *На неподвижном круглом цилиндре радиуса R лежит доска, как показано на рисунке 12, а. Толщина доски равна h. При каком соотношении между h и R равновесие доски будет устойчивым? Трение между доской и цилиндром велико.*

Чтобы выяснить, каким является равновесие доски, надо повернуть ее относительно цилиндра на небольшой угол α и посмотреть, что будет дальше.

Так как трение между доской и цилиндром велико, то при повороте доски она не скользит по цилиндру, но высота ее центра тяжести изменяется. При этом положение равновесия доски будет устойчивым, если при повороте центр тяжести доски поднимется. Поэтому для того чтобы решить задачу, нужно найти положение центра тяжести доски в горизонтальном положении, затем найти положение центра тяжести доски, повернутой на малый угол α, и записать условие, что в этом новом положении центр тяжести доски находится выше, чем в прежнем.

Будем все высоты отсчитывать от горизонтальной плоскости, проходящей через середину цилиндра.

Когда доска горизонтальна, ее центр тяжести — точка C — находится на высоте (см. рис. 12, *б*)

$$H_1 = OC = R + \frac{h}{2},$$

а в новом положении — на высоте

$$H_2 = C'M.$$

Свяжем высоту H_2 с R, h и α, для чего сделаем некоторые дополнительные построения. Опустим из точки C' перпендикуляр на сторону доски, опирающуюся на цилиндр, то есть на основание доски, до пересечения с этой стороной в точке B'. Затем из точки O проведем радиус в точку касания A и продолжим его до прямой, проходящей через точку C' и параллельной основанию доски; получим точку D. Теперь из точки D опустим перпендикуляр DF на горизонтальную плоскость и перпендикуляр DE на прямую $C'M$.

Высота

$$H_2 = C'M = C'E + EM.$$

Из треугольника FDO найдем отрезок DF, который равен отрезку EM:

$$DF = EM = OD\cos\alpha = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha.$$

Из треугольника $C'DE$ найдем $C'E$:

$$C'E = DC'\sin\alpha,$$

где $DC' = AB'$. Очевидно, что отрезок AB' можно считать равным длине дуги $AB = R\alpha$. Поэтому

$$C'E = R\alpha\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$H_2 = C'M = C'E + EM = R\alpha\sin\alpha + \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha.$$

Равновесие доски устойчивое, если $H_2 > H_1$, то есть если

$$R\alpha\sin\alpha + \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha > R + \frac{h}{2},$$

или

$$R\alpha\sin\alpha - \left(R + \frac{h}{2}\right)(1 - \cos\alpha) > 0.$$

Заменяя $1 - \cos\alpha$ на $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, получим

$$R\alpha\sin\alpha - 2\left(R + \frac{h}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2} > 0.$$

Так как угол α мал, то

$$\sin\alpha \approx \alpha \quad \text{и} \quad \sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому последнее неравенство можно переписать так:

$$R\alpha^2 - 2\left(R + \frac{h}{2}\right)\frac{\alpha^2}{4} > 0,$$

откуда

$$h < 2R.$$

Итак, положение равновесия доски будет устойчивым, если ее толщина меньше диаметра цилиндра.

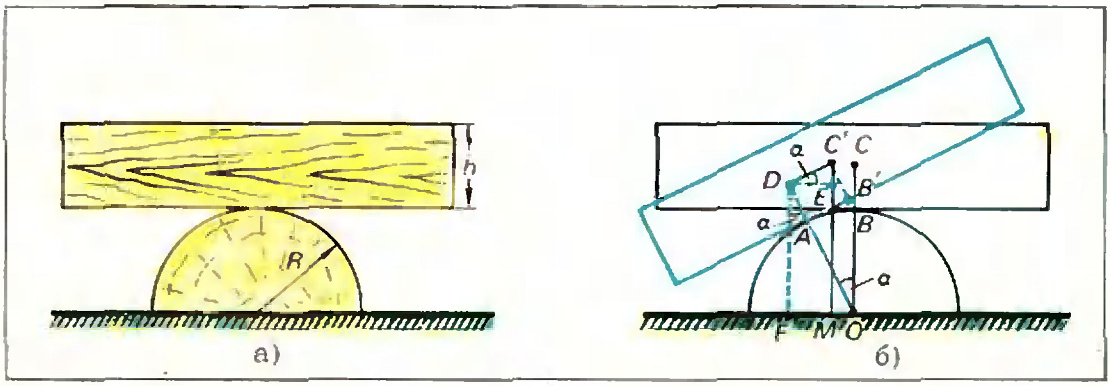


Рис. 12.

Ф222. *Громоотвод соединен с землей при помощи тонкостенной трубки диаметром 2 см и толщиной стенок 2 мм. После удара молнии трубка мгновенно превратилась в круглый стержень. Объясните это явление и оцените силу тока разряда, если известно, что при сжатии цилиндрический образец диаметром 3 мм, сделанный из того же материала, что и трубка, разрушался при силе 140 000 н.*

При ударе молнии в громоотвод по трубке пошел ток. Можно считать, что он по трубке распределен равномерно. Разобьем мысленно трубку на вертикальные проводники, параллельные оси трубки. Токи, идущие по таким проводникам, параллельны друг другу и направлены в одну сторону, поэтому проводники притягиваются друг к другу. Очевидно, при ударе молнии это взаимное притяжение проводников было столь велико, что напряжение*) в стержне превысило предел прочности $\sigma_{пр}$, то есть то максимальное напряжение, при котором материал трубки начинает разрушаться, и трубка превратилась в стержень.

Для оценки силы тока I грозового разряда будем считать, что притягиваются два проводника с током (две половинки трубки), находящиеся на расстоянии R друг от друга, причем по каждому из них идет ток $\frac{I}{2}$. Согласно закону Ампера для параллельных токов сила взаимодействия этих проводников равна

$$F = \mu_0\frac{I^2/4}{2\pi R}l,$$

где l — длина трубки, R — радиус трубки.

---

*) Напомним, что напряжением образца при деформации называют отношение действующей силы к площади сечения, перпендикулярного этой силе.

Эта сила вызывает в трубке напряжение

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{la} = \mu_0 \frac{I^2}{8\pi Ra}$$

($a = 2$ *мм* — толщина стенок трубки). В то же время материал трубки, как показали испытания образца, разрушается при напряжении

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{Q}{\pi d^2/4},$$

где d — диаметр образца, $Q = 140\,000$ *н* — разрушающая сила.

Следовательно,

$$\mu_0 \frac{I^2}{8\pi Ra} \approx \frac{4Q}{\pi d^2},$$

откуда

$$I \approx \sqrt{\frac{32QRa}{d^2\mu_0}} = \sqrt{\frac{32\cdot 1{,}4\cdot 10^5\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-3}}{9\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}26\cdot 10^{-6}}} \approx \approx 3\cdot 10^{-6}\ (a).$$

И. Ш. Слободецкий

Редакция получила больше 600 писем с решениями задач **Ф213 — Ф222**. Почти все читатели справились с задачами **Ф215** и **Ф218**. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи):

С. Абрамов (Москва) **1**; *С. Актершев* (Магнитогорск) **9, 1**; *Ю. Алекна* (Алитус Лит. ССР) **1**; *С. Алехин* (Липецк) **4**; *А. Амельченко* (Магнитогорск) **3, 4, 6**; *А. Амиров* (Оренбург) **7**; *П. Анциферов* (Фатеж) **3, 4, 9**; *С. Астафьев* (Орджоникидзе) **9**; *И. Ахатов* (Уфа) **4**; *В. Бакуров* (Душанбе) **2**; *А. Бараов* (Москва) **3, 4**; *А. Баринов* (с. Семиозерье Выборгского р-на) **1**; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) **4**; *В. Беляев* (Москва) **3, 4, 6, 7**; *В. Бенхан* (Калинин) **1**; *М. Берман* (Капустин Яр-1) **4**; *С. Богданов* (с. Вавожск Удм. АССР) **1**; *С. Бороздин* (Новгород) **4**; *В. Борь* (Запорожье) **3**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **7**; *А. Бузулуцков* (Новосибирск) **7**; *М. Валюнин* (Баку) **3, 4**; *В. Ваничкин* (Абай) **3**; *А. Васищев* (Ставрополь) **7**; *М. Васнецов* (Долгопрудный Московской обл.) **7, 1**; *М. Ведула* (Артемовск Донецкой обл.) **4, 1**; *А. Векслер* (Ташкент) **3, 4**; *А. Виноградов* (Целиноград) **1**; *П. Волохов* (п. Крнуляны МССР) **7, 2**; *Л. Воронов* (Ленинград) **4, 7**; *А. Восканян* (Ереван) **9**; *Д. Габриэлян* (Белая Калитва) **9**; *В. Галайдич* (п. Сахновщина Харьковской обл.) **3**; *А. Галюченко* (Харьков) **1**; *А. Герман* (Воронеж) **4, 6, 7, 0**; *С. Герц* (Хуст) **3, 4**; *В. Герцик* (Николаев) **1, 2**; *Р. Гирдянис* (Вильнюс) **4, 1**; *Ю. Гладе* (Тернополь) **1**; *Л. Глазман* (Харьков) **1**; *С. Глазнов* (Златоуст) **1**; *О. Глущенко* (Киев) **3, 7**; *Г. Говяда* (Киев) **3, 1**; *А. Годунов* (Пинск) **4**; *Я. Голда* (Тернополь) **4**; *А. Гуревич* (Минск) **4, 9, 2**; *В. Даник* (Черкассы) **3, 4**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **1**; *А. Дробинин* (Евпатория) **1**; *Ю. Дубина* (п. Сахновщина Харьковской обл.) **3**; *Р. Егорян* (Раздан) **1**; *С. Жаров* (Ефремов) **7, 1**; *В. Жук* (Грозный) **3, 4**; *С. Заичко* (с. Обуховка Ростовской обл.) **3**; *И. Зайцев* (с. Райгород Черкасской обл.) **4**; *В. Зарубин* (Одинцовский р-н Московской обл.) **1**; *Ю. Зеленцов* (Актюбинск) **3, 4, 7**; *С. Зенович* (Ташкент) **3, 7, 1**; *В. Золатарев* (Одесса) **7, 1**; *В. Зонов* (Кирс) **4, 7**; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) **3**; *С. Зырянов* (Тамбов) **3, 4**; *А. Иванов* (Фергана) **1**; *В. Иванов* (с. Могутово Оренбургской обл.) **7**; *А. Ивлев* (п. Стройкерамики Куйбышевской обл.) **3, 4**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **3, 4, 1**; *А. Измайлов* (Баку) **3**; *А. Илькун* (Зеленодольск ТАССР) **7, 9, 1**; *А. Калуцкий* (Иссык) **4**; *Е. Калягина* (Грозный) **4**; *К. Канжапарова* (п. Краснокумск Павлодарской обл.) **4**; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) **3, 4, 7, 9, 1, 2**; *С. Карпенко* (Киев) **4, 7**; *С. Картюков* (Ульяновск) **4**; *В. Карлин* (Волоколамский р-н Московской обл.) **1**; *М. Качановский* (д. Вишевичи Брестской обл.) **4**; *В. Квасницын* (Коркино) **1**; *А. Клочко* (Жуковский) **3**; *В. Ковалевский* (Витебск) **1**; *Л. Коган* (Черновцы) **3, 4, 7**; *Р. Козак* (Винница) **1**; *А. Козарян* (Ереван) **4**; *С. Коляда* (с. Пришиб Полтавской обл.) **1**; *А. Корнилов* (Ленинакан) **7**; *В. Корошков* (Калининград Московской обл.) **3, 4**; *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл.) **3, 7, 9, 0**; *Л. Кофман* (Таллин) **3, 4, 7, 1**; *С. Кривонос* (Днепропетровск) **1, 2**; *С. Кручинин* (п. Грушевое Ворошиловградской обл.) **7**; *А. Кудряшов* (Саратов) **4**; *А. Кузнецов* (Саратов) **4, 7**; *А. Кузнецов* (Казань) **4**; *В. Кузьмин* (Грозный) **3, 4, 7**; *А. Куликов* (Ленинград) **3, 7**; *В. Куропаткин* (Кирово-Чепецк) **1**; *А. Кутлимуратов* (Хорезмская обл. Узб. ССР) **7, 0**; *И. Куцык* (Ярославль) **3, 4, 6**; *В. Лисенков* (Киреевск) **1**; *А. Лихоманов* (Саратов) **4**; *Н. Ложникова* (Оренбург) **7**; *Г. Львовский* (Днепропетровск) **1**; *С. Ляпин* (п/о Белокоровичи Житомирской обл.) **3**; *Е. Мазур* (Дербент) **3**; *А. Макаров* (Харьков) **1**; *С. Макаров* (Саратов) **3, 7**; *Ю. Мальцев* (Березники Полтавской обл.) **1**; *Г. Мамедов* (Баку) **4, 7**; *В. Мамоский* (Краматорск) **4**; *Е. Медовой* (Запорожье) **4**; *С. Мельник* (Харьков) **4, 1**; *Е. Метт* (Ленинград) **1**; *В. Милованов* (Воронеж) **3, 4**; *А. Моцарьян* (Орск) **3, 4**; *Ю. Муринец* (Магнитогорск) **3**; *Р. Мусин* (с. Никитино Оренбургской обл.) **9, 1**; *В. Навценя* (п. Старая Купавна Московской обл.) **3, 4, 9**; *А. Нарушевич* (Канск) **1**; *А. Николаев* (Москва) **4, 7, 1**; *Е. Никитин* (Саранск) **9**; *Б. Новосядлый* (Чертков) **4**; *В. Навроцкий* (Овруч) **7, 1**; *С. Нужный* (Куйбышев) **4**; *С. Оганесян* (Армавир) **7**; *А. Огир* (п. Лутовиновка Полтавского р-на) **3, 4**; *В. Онохов* (с. Саваслейка Горьковской обл.) **4**; *С. Островская* (Харьков) **3, 4**; *В. Пархоменко* (Тейково) **1**; *В. Перевозкин*

(Омск) 4; *Ю. Перфильев* (Саратов) 1; *С. Петураев* (п. Ясный Оренбургского р-на) 9; *С. Пеунков* (Архангельск) 3; *К. Пирятинский* (Кишинев) 3, 2; *А. Полеханов* (Клинцы) 2; *А. Поблагуев* (Винница) 1; *О. Поваляев* (Подольск) 3, 4, 2; *А. Полянский* (Челябинск) 1; *С. Поляруш* (Жабинка) 7, 9; *А. Пономарев* (Киев) 4; *С. Попов* (Шахты) 4; *С. Прокопенко* (Одинцово) 3, 4; *В. Пуховой* (с. Сковородиновка Харьковской обл.) 4; *В. Рапопорт* (Минск) 3; *А. Рассказов* (Тихорецк) 4; *А. Ремеев* (Ташкент) 4; *В. Решетняк* (Киев) 3; *В. Ройна* (Познань, Польша) 9; *Б. Розенштейн* (Каменец-Подольский) 1; *Д. Рубанец* (Сторожинец) 3, 4; *М. Рывкин* (Бобруйск) 3; *В. Рыжиков* (Актюбинск) 3, 1; *Е. Сандер* (д. Гармакла Омской обл.) 3, 4, 7; *И. Сафаргалиев* (с. Янги-Курган Узб. ССР) 9; *В. Свистунов* (Горький) 3, 4; *Ю. Свириденко* (Фрунзе) 4; *А. Сергеев* (Подольск) 3, 7; *А. Сияков* (Калинин) 4, 7; *Р. Сирота* (Харьков) 1; *Ю. Скалько* (Черкассы) 3; *А. Смирнов* (Евпатория) 7; *И. Смирнов* (п. Звенигово Марийской АССР) 1; *В. Смоленков* (Ленинград) 3; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 3, 4, 7, 9, 1, 2; *С. Смышляев* (Вятские Поляны) 3, 7, 1; *В. Соколов* (Кишинев) 0, 1; *В. Спиридонов* (Вознесенский р-н Николаевской обл.) 1; *Н. Сугоров* (Самарканд) 4; *М. Султангалиев* (с. Ваныш БАССР) 3, 4; *А. Суровежкин* (с. Гуляй-Борисовка Ростовской обл.) 4; *А. Теватян* (п. Сисиан Арм. ССР) 9; *А. Тверской* (Москва) 9, 1; *О. Трунов* (Джалал-Абад) 4; *А. Тужилин* (Москва) 3, 6, 7, 1; *В. Тумаков* (Рустави) 1; *Д. Узненко* (Магнитогорск) 3; *И. Усвят* (Ташкент) 3, 4, 7, 1, 2; *Н. Федин* (Омск) 3, 4, 7, 9, 0, 1; *И. Федичкин* (Баку) 6; *Е. Федоров* (Магнитогорск) 3; *С. Фрид* (Москва) 3, 4, 7, 1, 2; *Д. Фушман* (Черновцы) 4; *И. Харченко* (Сальск) 7; *В. Хацимовский* (Красноярск) 3; *С. Хохлов* (Жданов) 1; *А. Худавердян* (Ереван) 4, 7; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) 3, 1; *В. Чеплаков* (Волгоград) 1; *А. Черников* (с. Андреевка Оренбургской обл.) 4; *А. Чернявский* (Харьков) 3; *В. Чернышов* (Пензенская обл.) 4; *А. Чечулин* (Уфа) 4, 7; *В. Чистяков* (Буй) 3; *А. Шагин* (п. Глинищево Ивановской обл.) 9; *Е. Шафирович* (Ногинск) 3, 1; *К. Шварцман* (Кишинев) 3, 4; *В. Шендрик* (Алма-Ата) 3, 6, 7; *В. Шкатов* (Одинцово) 2; *В. Шнейдман* (Харьков) 3, 7, 1, 2; *А. Штиль* (Оренбург) 1; *С. Шульга* (Славянск) 4, 7, 0, 2; *А. Шумаков* (Тула) 4; *О. Щербаков* (Линда) 3, 4, 6; *Н. Щербина* (Днепропетровск) 4; *А. Яблонский* (Вологда) 1; *С. Яременко* (Москва) 4, 6, 7.

С. Г. Семенчинский

Конфуз с «Обратной теоремой»

(Окончание, начало см. на с. 25)

Если ты всю жизнь считаешь, что в деньгах счастье . . . Если ты, наконец, крадя их, добываешь . . . «Дети, если верна прямая теорема», если в деньгах счастье . . . Прямая, может быть, верна. С обратной вышел конфуз. Краденые деньги не дали Назарову счастья . . . «Дети, если верна прямая теорема, это еще не значит, что верна и обратная ей». Как решить эту теорему?»

Оставим в стороне странные обороты речи вроде «теоремой мы называем такие рассуждения» или «как решить эту теорему». Разберемся лишь в том, какую же теорему имеет в виду автор, тем более, что приведенный пассаж ему, видимо, так понравился, что послужил даже поводом для названия повести.

Насколько можно понять, «прямой теоремой» автор называет утверждение «если есть деньги, то есть счастье». И своей повестью он достаточно убедительно показывает, что эта «теорема», вера в справедливость которой составляла жизненное кредо Назарова, не верна — добытые нечестным путем деньги счастья не приносят. Автор напрасно пишет: «Прямая (теорема), может быть, верна». Она не верна: выражаясь математическим языком, история Назарова — контрпример, опровергающий ее справедливость.

А при чем же здесь обратная теорема? Увы, совершенно ни при чем (хотя, кстати, и она не верна). Видимо, автор, увлекшись внешней «красивостью» своих рассуждений, не удосужился разобраться по существу в том, что же такое прямая и обратная теоремы.

Н. Х.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Читатели советуют

Н. Х. Розов

В обширной редакционной почте «Кванта» много писем, в которых обсуждаются те или иные теоретические вопросы школьного курса математики и физики, предлагаются приемы решения некоторых типов задач, содержатся отдельные замечания и наблюдения методического характера. Хотя приводимые читателями соображения и задачи не всегда новы и оригинальны, ряд затронутых в письмах вопросов, на наш взгляд, представляет интерес для поступающих.

Поэтому сегодня в «Практикуме абитуриента» помещается необычная статья: редакция публикует подборку материалов по математике, составленную по идеям и предложениям из писем читателей. Мы надеемся, что подобные подборки явятся своеобразной формой обмена опытом и идеями.

На вступительных экзаменах часто предлагают задачи такого типа: *выяснить (не пользуясь таблицами), что больше*: $\log_a M$ *или* $\log_b N$, где a, b, M, N — данные числа, причем, естественно, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$. В «Практикуме абитуриента» (см. «Квант», 1972, № 3) уже приводились примеры решений подобных задач. Читатель *Б. А. Грубиян* (г. Березники Пермской области) обращает внимание на возможность использовать для сравнения величины логарифмов двух чисел следующий прием.

Задача решается совсем просто, если удается найти такое целое число k, что, скажем,

$$\log_a M < k, \quad k < \log_b N.$$

Поэтому наиболее интересен случай, когда

$$k-1 < \log_a M < k,$$
$$k-1 < \log_b N < k.$$

В этом случае следует стремиться *подобрать такое натуральное n, чтобы между $n \log_a M$ и $n \log_b N$ оказалось некоторое целое число p*. Подбор числа n с указанным свойством осуществляется последовательными пробами.

Пример 1. *Сравнить* $\log_3 4$ *и* $\log_7 10$.

Легко проверить, что $1 < \log_3 4 < 2$, $1 < \log_7 10 < 2$, но отсюда не видно, какой из предложенных логарифмов больше. Возьмем $n = 2$; получим $2 \log_3 4 = \log_3 16$, $2 \log_7 10 = \log_7 100$. Так как $2 < \log_3 16 < 3$ и $2 < \log_7 100 < 3$ (убедитесь в этом!), то значение $n = 2$ требуемым свойством не обладает. Аналогично проверяется, что и значение $n = 3$ нам не подходит.

Для $n = 4$ получаем:

$$4 \log_3 4 = \log_3 256, \quad 4 \log_7 10 = \log_7 10\,000.$$

Поскольку $3^5 = 243$, $3^6 = 729$ и $7^4 = 2401$, $7^5 = 16\,807$, то

$$5 < 4 \log_3 4 < 6, \quad 4 < 4 \log_7 10 < 5,$$

так что значение $n = 4$ требуемым свойством обладает (роль p играет число 5). Отсюда получаем, что

$$\log_3 4 > \log_7 10.$$

Пример 2. *Какое из двух чисел больше*: $\log_{\sqrt{2}} \frac{6}{11}$ или $\log_{1/3} \pi$?

Непосредственно проверяется, что оба эти числа заключены между -2 и -1. Взяв $n = 2$, получим

$$2\log_{\sqrt{2}}\frac{6}{11}=-\log_2\frac{11^4}{6^4},$$

откуда легко найти, что

$$-4<2\log_{\sqrt{2}}\frac{6}{11}<-3.$$

С другой стороны,

$$2\log_{1/3}\pi=\log_{1/3}\pi^2,$$

и несложный подсчет показывает, что

$$-3<\log_{1/3}\pi^2<-2.$$

Таким образом, $\log_{\sqrt{2}}\frac{6}{11}<\log_{1/3}\pi$.

Конечно, число проб, необходимых для подбора нужного n, в разных задачах различно (и может быть велико), но важно, что такое n всегда найдется. Именно, докажем следующее утверждение, являющееся теоретическим обоснованием использованного приема: *если $\log_a M\neq\log_b N$, то существует такое натуральное n, что между $n\log_a M$ и $n\log_b N$ заключено некоторое целое число.*

Пусть $\alpha=\log_a M$ и $\beta=\log_b N$, причем $\alpha\neq\beta$. Допустим, например, что $\alpha>\beta$ (случай $\alpha<\beta$ рассматривается аналогично). Тогда $\alpha-\beta$ — положительное число, и потому найдется такое натуральное n, что дробь $1/n$ меньше этого положительного числа: $\frac{1}{n}<\alpha-\beta$ или $n\alpha-n\beta>1$. Но последнее неравенство означает, что числа $n\alpha=n\log_a M$ и $n\beta=n\log_b N$ отличаются больше, чем на единицу, а значит, между этими числами должно находиться некоторое целое число.

Напомним в заключение один весьма общий метод определения знака неравенства между числами (или выражениями) α и β: *пытаются подобрать такое число (выражение) γ, для которого, например, $\alpha<\gamma$ и одновременно $\gamma<\beta$.* Описанный выше прием является по существу вариантом этого метода: роль γ играет здесь число p/n.

Упражнения

1. (МГУ, ф-т психологии, 1969). Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_3 7>\log_7 27$.

2. (МГУ, филфак, 1969). Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_5 14>\log_7 18$.

3. (МГУ, экономич. ф-т, 1972). Не пользуясь таблицами, определить, что больше: $\log_4 60$ или $\log_3 30$.

* * *

При доказательстве неравенств иногда оказываются полезными алгебраические тождества и, в частности тождество

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

где n — натуральное число, а a и b — действительные числа. Ученик 10 класса *Л. Давитидзе* (село Шуахеви Грузинской ССР) предлагает читателям журнала использовать это тождество (доказав его) для решения следующего упражнения.

4. Доказать; что если m — натуральное число и $c\geqslant1$, то справедливо неравенство

$$\sqrt[m]{c+1}+\sqrt[m]{c-1}<2\sqrt[m]{c}.$$

* * *

Решение некоторых задач удается существенно упростить, если применить удачную тригонометрическую подстановку. Гибкость тригонометрических формул позволяет в ряде случаев облегчить выполнение преобразований, освободиться от радикалов, получить более простые и обозримые выражения. Этому вопросу посвящены письма наших читателей *В. В. Пикан* (Киев) и *Д. П. Дорохина* (г. Павловская слобода Московской области).

Суть тригонометрической подстановки состоит в том, что переменная x, входящая в фигурирующие в условии задачи выражения, рассматривается как значение некоторой тригонометрической функции вспомогательного переменного угла φ, причем эту функцию стараются подобрать так, чтобы предложенные выражения записывались более компактно.

Пример 3. *Вычислить значение выражения*

$$A=\left[\frac{(x^2+a^2)^{-1/4}+(x^2-a^2)^{-1/4}}{(x^2+a^2)^{-1/4}-(x^2-a^2)^{-1/4}}\right]^{-3}\qquad(1)$$

$$при\ x = a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2},$$
$$где\ a < 0,\ n > m > 0.$$

Так как интересующее нас значение x отрицательно, то прежде всего упростим выражение (1), считая, что $x < a$. (Заметьте, что (1) имеет смысл лишь при $|x| > |a|$, и докажите, что указанное в условии значение x этому неравенству удовлетворяет!). Наличие двучленов $x^2 \pm a^2$ наводит на мысль положить $x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, что позволит записать эти двучлены проще:

$$x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi},$$
$$x^2 - a^2 = -\frac{a^2\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Поэтому применим тригонометрическую подстановку:

$$x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Несложные преобразования показывают, что тогда

$$A = \left(\frac{\sqrt{-\cos 2\varphi} - 1}{\sqrt{-\cos 2\varphi} + 1}\right)^3,\ \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Далее, легко подсчитать, что если $x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi = a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}$, то

$$\cos 2\varphi = \frac{1-\mathrm{tg}^2\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = -\frac{(n-m)^2}{(n+m)^2},$$

и потому при указанном значении x

$$A = \frac{(4n^2-m^2)\sqrt{n^2-m^2}-(4n^2-3m^2)n}{m^3}.$$

Пример 4. *Решить уравнение*

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right] = 2+\sqrt{1-x^2}.$$

Областью допустимых значений для этого уравнения является множество $|x| \leqslant 1$. Если воспользоваться тригонометрической подстановкой $x = \cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то, как легко проверить, от радикалов удается освободиться — уравнение принимает вид

$$\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right)\cdot 2\sqrt{2}\ \times$$
$$\times\left(\cos^3\frac{\varphi}{2} - \sin^3\frac{\varphi}{2}\right) = 2+\sin\varphi.$$

Отсюда в свою очередь получаем уравнение

$$\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\sin\varphi\right)\cos\varphi =$$
$$= 1+\frac{1}{2}\sin\varphi$$

или

$$(\sqrt{2}\cos\varphi - 1)\left(1+\frac{1}{2}\sin\varphi\right) = 0,$$

которое удовлетворяется лишь при $\cos\varphi = \sqrt{2}/2$. Следовательно, исходное уравнение имеет корень $x = \sqrt{2}/2$.

Пример 5. *Найти наименьшее и наибольшее значения функции*

$$y = \frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}. \qquad (2)$$

Аргумент этой функции пробегает все действительные числа, и потому мы можем рассматривать x как значение тангенса вспомогательного переменного угла φ, изменяющегося на промежутке $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Тригонометрическая подстановка $x = \mathrm{tg}\,\varphi$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ позволяет вместо функции (2) исследовать функцию

$$y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi \qquad (3)$$

при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Поскольку $0 \leqslant \sin^2 2\varphi \leqslant 1$, то очевидно, что наименьшее значение функции (3) равно $^1/_2$ и достигается при $\varphi = -\pi/4$ и при $\varphi = \pi/4$, а наибольшее равно 1 и достигается при $\varphi = 0$. Отсюда заключаем, что наименьшее значение функции (2) равно $^1/_2$ и достигается при $x = -1$ и при $x = 1$, а наибольшее значение равно 1 и достигается при $x = 0$.

Отметим, что примеры использования тригонометрических подстановок для решения уравнений уже рассматривались в «Практикуме абитуриента» (см. «Квант», 1971, № 1).

Упражнения

5. Упростить выражение

$$B=\frac{(m+x)^{3/2}-(m-x)^{3/2}}{(m+x)^{3/2}+(m-x)^{3/2}},\quad m>0.$$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

* * *

Ученик 9 класса *В. Оласюк* (г. Тулун Иркутской области) предлагает читателям журнала решить следующую задачу.

7. На листе бумаги изображены оси координат и парабола, являющаяся графиком функции $y=x^2$. Однако единица длины, использовавшаяся при построении графика для измерения расстояний вдоль осей, не указана. Как восстановить эту единицу длины?

* * *

При решении уравнений удачная замена неизвестного часто позволяет вместо сложного исходного уравнения рассматривать более простое. Однако «увидеть» нужную замену не всегда легко, и здесь может помочь лишь настойчивость, приобретенный опыт и знание наиболее употребительных замен.

Наш читатель *И. А. Гаврилов* (г. Фрязино Московской области) в своем письме напоминает об одном типе замен для решения алгебраических уравнений. Эти замены с полным основанием можно назвать «симметризацией».

Покажем, в чем состоит «симметризация» на примере двух уравнений четвертой степени.

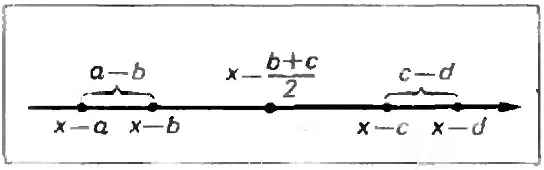
Если в уравнении

$$(x-a)^4+(x-b)^4=c$$

ввести вместо неизвестного x новое неизвестное

$$y=x-\frac{a+b}{2},$$

то получится биквадратное уравнение.



Ясно, что при любом x число $x-\frac{a+b}{2}$ является серединой отрезка с концами в точках $x-a$ и $x-b$.

Если в уравнении

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=p \quad (4)$$

разности каких-либо пар чисел a, b, c, d совпадают, например, $a-b=c-d$, то замена неизвестного

$$y=x-\frac{b+c}{2}$$

приводит к биквадратному уравнению (убедитесь в этом!). Отметим, что если $a-b=c-d$, то двучлен $x-\frac{b+c}{2}$ служит в некотором смысле «центром тяжести» сомножителей $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, что наглядно видно из геометрической интерпретации этих выражений точками числовой оси (см. рисунок).

Идея «симметризации» с успехом применяется при решении и ряда других алгебраических уравнений и систем уравнений.

Упражнения

8. Решить уравнение $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11.$

9. Решить уравнение

$$4\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}=4+x.$$

10. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases}(x+y-2)^4+(x+y)^4=82,\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$$

11. (УДН, 1973). Решить уравнение

$$(x^2-4x)^2+2(x-2)^2=43.$$

12. (УДН, 1973). Решить уравнение

$$\frac{5}{x^2+3x}+\frac{6}{(x+1)(x+2)}=1.$$

Г.Я. Мякишев

О законе сохранения энергии в механике

Закон сохранения энергии в механике можно получить, используя законы Ньютона и зная выражения для сил, зависящих от расстояний между телами или их частями (силы тяготения и силы упругости).

Основные понятия, которые при этом используются, это *работа*, *кинетическая энергия*, *потенциальная энергия* и *полная энергия*. Эти понятия, за исключением потенциальной энергии, не являются особенно сложными. Тем не менее наибольшее количество ложных представлений возникает при изучении механики именно в связи с законом сохранения энергии. Причина, по-видимому, в том, что, с одной стороны, изучающие механику не всегда вдумываются как следует в смысл основных понятий, а с другой стороны (и это главное), часто для облегчения понимания сути дела рассматриваются простые частные случаи, но затем на их основе непродуманно делаются более общие заключения, которые оказываются иногда несостоятельными. Цель настоящей статьи — подробно остановиться на недоразумениях, связанных с понятием работы и энергии в механике.

Работа

Напомним определение работы. Работа силы при столь малом перемещении тела (материальной точки) $\Delta\mathbf{s}$, что действующую на тело силу $\mathbf{F}$ можно считать постоянной по величине и направлению, равна (рис. 1)

$$A = |\mathbf{F}|\ |\Delta\mathbf{s}|\cos\alpha, \qquad (1)$$

где α — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\Delta\mathbf{s}$. Другими словами, работа определяется скалярным произведением векторов $\mathbf{F}$ и $\Delta\mathbf{s}$, то есть

$$A = (\mathbf{F}\,\Delta\mathbf{s}).$$

Если тело движется прямолинейно и сила $\mathbf{F}$ постоянна, то формула (1) применима при любой величине перемещения.

Иногда говорят, что работа данной силы равна произведению проекции силы на перемещение, *вызванное этой силой*. Это неверно. Не важно, что вызывает перемещение тела. Если во время перемещения на тело действует некоторая сила, то работа этой силы

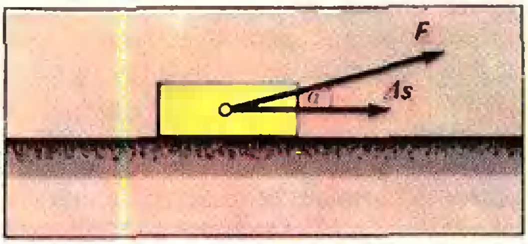


Рис. 1.

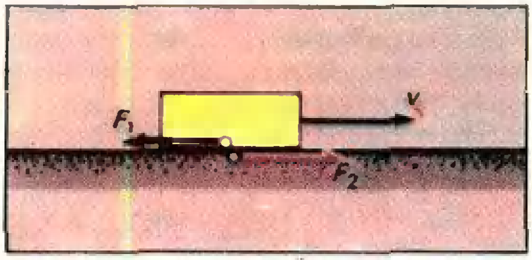


Рис. 2. Сила трения F_1, действующая на тело, совершает работу, а сила трения F_2, действующая на неподвижную опору, работы не совершает.

равна проекции силы на направление перемещения, умноженной на само перемещение.

Отсюда следует, что работа не совершается, когда точка приложения силы не перемещается относительно данной системы отсчета. Так, при скольжении тела с трением по некоторой поверхности (рис. 2) сила трения F_1, приложенная к телу, совершает работу, а сила трения F_2, приложенная к поверхности, никакой работы не совершает.

Величина совершенной работы, конечно, зависит от выбора системы отсчета. Ведь тело, неподвижное в одной системе отсчета, будет перемещаться в другой, движущейся относительно первой. Например, если человек стоит в поезде и просто удерживает растянутую пружину, то в системе отсчета, связанной с поездом, рука человека не совершает никакой работы, так как свободный конец пружины не перемещается. Но с точки зрения наблюдателя в системе отсчета, связанной с землей, работа будет произведена. Еще пример. Обычно считается, что работа силы трения скольжения всегда отрицательна. Но она может быть и положительна. Все дело в выборе системы отсчета (см. раздел «Роль сил трения»).

Кинетическая энергия

Наиболее простым является понятие кинетической энергии. Используя определение работы и второй закон Ньютона, нетрудно показать, что во всех случаях работа любой силы **F** равна изменению кинетической энергии тела $K = \frac{mv^2}{2}$:

$$A = (\mathbf{F}\,\Delta\mathbf{s}) = \Delta K. \qquad (2)$$

Природа силы здесь совершенно не важна. Это может быть сила тяготения, сила упругости или сила трения.

Кинетическая энергия отдельного тела определяется его массой и скоростью и не зависит от того, взаимодействует это тело с другими телами или нет. Величина кинетической энергии тела, как и работа силы, зависит от системы отсчета.

Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий тел, входящих в эту систему.

Потенциальная энергия — энергия взаимодействия тел

Не всегда подчеркивается, что потенциальная энергия в механике — это энергия взаимодействия по крайней мере двух тел. Понятие потенциальной энергии относится к системе тел, а не к одному телу. Если в системе имеется несколько тел, то полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех пар взаимодействующих тел (любое тело взаимодействует с каждым из остальных).

Обычно при выводе формулы, связывающей изменение потенциальной энергии с работой сил, одно из тел системы принимается за неподвижное. Так, когда рассматривается падение груза на Землю под действием силы тяжести, то смещением Земли при этом можно пренебречь. Поэтому работа сил взаимодействия между Землей и грузом сводится к работе только одной силы, действующей на груз. Или другой пример. Сжатая или растянутая пружина, действующая на тело, обычно закреплена одним концом, и этот конец пружины не перемещается (фактически он скреплен с Земным шаром). Работу совершает при этом лишь сила упругости деформированной пружины, приложенная к телу.

Из-за этого потенциальную энергию системы двух тел привыкают рассматривать как энергию одного тела. Это может привести к путанице.

В действительности справедливо во всех случаях следующее утверждение: изменение потенциальной энергии двух тел, взаимодействующих с силами, зависящими только от расстояния между телами, равно работе этих сил, взятой со знаком минус:

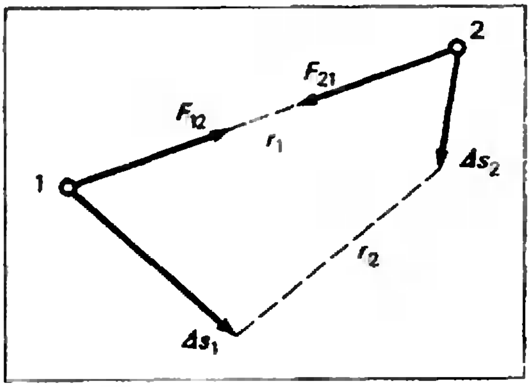


Рис. 3. Изменение потенциальной энергии взаимодействия тел 1 и 2 определяется работой сил $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ на перемещениях $\Delta \mathbf{s}_1$ и $\Delta \mathbf{s}_2$.

$$A = (\mathbf{F}_{12}\Delta \mathbf{s}_1) + (\mathbf{F}_{21}\Delta \mathbf{s}_2) = -[\Pi(r_2) - \Pi(r_1)] = -\Delta\Pi, \quad (3)$$

где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на тело 1 со стороны тела 2, а $\mathbf{F}_{21}$ — сила, действующая на тело 2 со стороны тела 1 (рис. 3).

Силы взаимодействия между телами, которые зависят только от расстояния между телами, являются консервативными силами. Упомянутое утверждение есть следствие того, что работа консервативных сил определяется только начальными и конечными положениями тел и не зависит от формы их траекторий.

Изменение потенциальной энергии легко вычисляется, если известна зависимость сил от расстояния между взаимодействующими телами.

Нулевой уровень потенциальной энергии

Согласно уравнению (3) работа сил взаимодействия определяет не саму потенциальную энергию, а ее изменение.

Для силы тяжести вблизи поверхности Земли

$$\Delta\Pi_т = mgh_2 - mgh_1, \quad (4)$$

где h_1 и h_2 — высоты тела над Землей в начальном и конечном состояниях.

Изменение потенциальной энергии деформированной пружины

$$\Delta\Pi_у = \frac{k(\Delta l_2)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_1)^2}{2}, \quad (5)$$

где k — коэффициент упругости, а Δl_1 и Δl_2 — начальная и конечная деформации пружины.

Поскольку работа определяет изменение потенциальной энергии, а не саму энергию, *только изменение энергии в механике имеет физический смысл*. Поэтому можно произвольно выбрать состояние системы, в котором ее потенциальная энергия считается равной нулю. Этому состоянию соответствует нулевой уровень потенциальной энергии. Выбор нулевого уровня производится по-разному и диктуется исключительно соображениями удобства, то есть простоты записи уравнения, выражающего закон сохранения энергии.

Обычно в качестве состояния с нулевой энергией выбирают такое состояние системы, при котором Π минимальна. Тогда потенциальная энергия положительна.

У пружины потенциальная энергия минимальна в отсутствие деформации а у камня — когда он лежит на поверхности Земли. Поэтому в первом случае (рис. 4)

$$\Pi_у = \frac{k(\Delta l)^2}{2}, \quad (6)$$

а во втором случае (рис. 5)

$$\Pi_т = mgh. \quad (7)$$

Но к данным выражениям можно добавить любую постоянную величину C, и это ничего не изменит в результатах применения закона сохранения энергии. Можно считать, что

$$\Pi_у = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + C, \quad \Pi_т = mgh + C. \quad (8)$$

Если во втором случае положить $C = -mgh_0$, то это будет означать, что нулевой уровень энергии принят на высоте h_0 над Землей.

Иногда невозможно выбрать нулевой уровень Π так, чтобы минимальная энергия равнялась нулю. Так, например, потенциальная энергия тяготения двух материальных

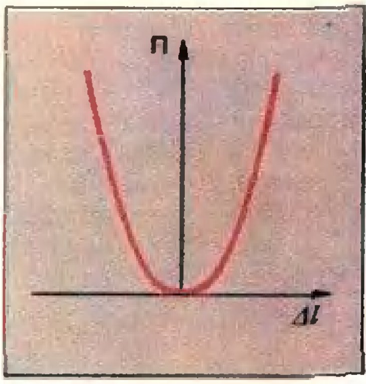


Рис. 4. Зависимость потенциальной энергии пружины П от деформации Δl.

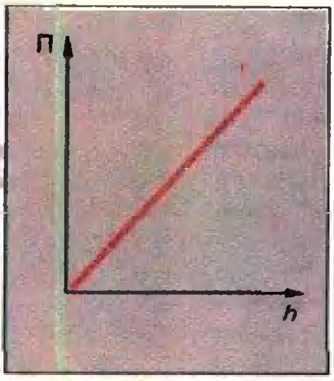


Рис. 5. Зависимость потенциальной энергии П взаимодействия камня с Земным шаром от высоты h камня над поверхностью Земли.

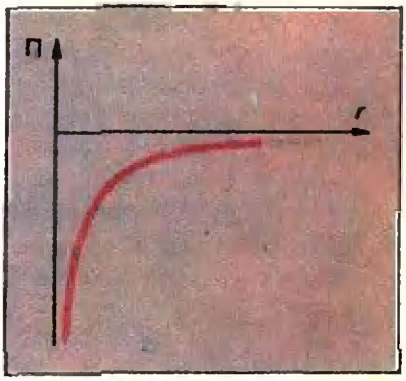


Рис. 6. Зависимость потенциальной энергии П взаимодействия двух точечных масс от расстояния r между ними.

точек равна

$$\Pi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} + C, \qquad (9)$$

где γ — гравитационная постоянная *) (см., например, статью Н. М. Сперанского «Потенциальная энергия тел в поле тяготения», «Квант», 1972, № 6).

При $r \to 0$ первое слагаемое стремится к $-\infty$. Поэтому минимальное значение энергии можно считать равным нулю лишь при $C = \infty$. Но пользоваться уравнениями, в которые входит бесконечная величина, разумеется, нельзя. Поэтому здесь удобнее положить $C = 0$ и тем самым за нулевой уровень П принять потенциальную энергию в состоянии, когда тела бесконечно удалены друг от друга ($r = \infty$). Тогда нулевому уровню будет соответствовать не минимальная, а максимальная энергия. При любом конечном значении r потенциальная энергия отрицательна (рис. 6).

Независимость потенциальной энергии от выбора системы отсчета

Заметим еще раз, что понятие потенциальной энергии имеет смысл для таких систем, в которых силы взаимодействия консервативны, то есть зависят лишь от расстояний между телами или их частями. Соответственно и П зависит от расстояний: от высоты камня над поверхностью Земли, от длины пружины, от расстояния между точечными массами или зарядами. От координат тел потенциальная энергия *непосредственно* не зависит. (Лишь постольку, поскольку расстояния являются функциями координат, можно говорить о зависимости П от координат.) Отсюда следует один очень важный вывод, на который часто не обращают внимания. Поскольку расстояния во всех системах отсчета, движущихся и неподвижных, одни и те же, *потенциальная энергия не зависит от выбора системы отсчета.*

Но как же это может быть? Ведь $\Delta\Pi = -A$, а работа зависит от движения системы отсчета. Вот здесь-то и проявляется отчетливо тот факт, что П есть энергия взаимодействия двух тел, а ее изменение определяется работой сил, действующих на оба тела. При переходе от неподвижной системы к движущейся меняются обе работы, но их сумма остается неизменной. В самом деле, если в некоторой системе отсчета за время t совершается работа

$$A_1 = (\mathbf{F}_{12}\Delta\mathbf{s}_1) + (\mathbf{F}_{21}\Delta\mathbf{s}_2),$$

то в другой системе, движущейся относительно первой, работа равна

*) Точно такой же вид имеет потенциальная энергия взаимодействия двух точечных электрических зарядов противоположного знака:

$$\Pi = -\frac{|q_1||q_2|}{r} + C.$$

$$A_2 = (\mathbf{F}_{12}(\Delta\mathbf{s}_1 + \Delta\mathbf{s}_0)) + (\mathbf{F}_{21}(\Delta\mathbf{s}_2 + \Delta\mathbf{s}_0)),$$

где $\Delta\mathbf{s}_0$ — перемещение систем друг относительно друга за время t. Так как по третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, то $(\mathbf{F}_{12}\Delta\mathbf{s}_0) = -(\mathbf{F}_{21}\Delta\mathbf{s}_0)$. Следовательно,

$$A_1 = A_2.$$

Закон сохранения энергии в замкнутой системе

В замкнутой системе, в которой действуют консервативные силы, работа этих сил $A = -\Delta\Pi$. С другой стороны, во всех случаях $A = \Delta K$. Это означает, что при совершении работы увеличение кинетической энергии сопровождается убылью потенциальной и наоборот:

$$\Delta K = -\Delta\Pi.$$

Отсюда вытекает закон сохранения полной механической энергии для замкнутой системы тел:

$$E = K + \Pi = \text{const}. \qquad (10)$$

Все это достаточно просто, и здесь неверные представления встречаются редко. Иначе обстоит дело в случае, если на систему действуют внешние силы.

Изменение энергии системы под действием внешних сил

Наиболее распространены здесь два недоразумения.

Во-первых, не всегда отчетливо понимают, что внешние силы *непосредственно* изменяют лишь кинетическую энергию тел системы, но не потенциальную энергию взаимодействия этих тел. Изменение потенциальной энергии системы всегда определяется работой сил взаимодействия (внутренних сил). Конечно, внешние силы изменяют расположение тел системы (так как изменяется их кинетическая энергия), и за счет этого меняется работа внутренних сил, а значит, меняется потенциальная энергия системы. Но если бы в системе не действовали консервативные силы, то потенциальная энергия при этом не изменялась бы.

Действительно, пусть на систему, состоящую из камня и Земли, действует внешняя сила $\mathbf{F}$. Этой силой может быть, например, натяжение веревки, привязанной к камню. Тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\mathbf{g}. \qquad (11)$$

Пусть за некоторый промежуток времени камень переместился вертикально вверх на $\Delta\mathbf{s}$. Умножая уравнение (11) слева и справа на $\Delta\mathbf{s}$, получим

$$m(\mathbf{a}\Delta\mathbf{s}) = (\mathbf{F}\Delta\mathbf{s}) + m(\mathbf{g}\Delta\mathbf{s}),$$

или

$$m(\mathbf{a}\Delta\mathbf{s}) - m(\mathbf{g}\Delta\mathbf{s}) = (\mathbf{F}\Delta\mathbf{s}). \qquad (12)$$

Первое слагаемое слева есть изменение кинетической энергии. Действительно, в этом случае

$$m(\mathbf{a}\,\Delta\,\mathbf{s}) = ma\,\Delta\,s = ma\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta\,K.$$

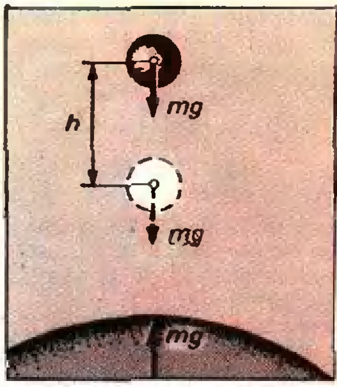
Второе слагаемое слева есть изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi$. Заметьте, что изменение потенциальной энергии произошло за счет работы сил взаимодействия Земли и камня. А правая часть — это работа внешней силы, которую можно назвать внешней работой $A_{\text{внеш}}$. Поэтому равенство (12) можно записать так:

$$\Delta K + \Delta\Pi = A_{\text{внеш}}, \qquad (13)$$

то есть изменение механической энергии системы равно работе внешней силы.

Другое заблуждение более серьезно.

Работа силы, действующей на тело (выражение (1)), определяется силой и перемещением тела. Но рассматриваемое тело, согласно третьему закону Ньютона, действует на другое тело (или тела), и при этом тоже может совершаться работа. Однако вычислить эту последнюю ра-



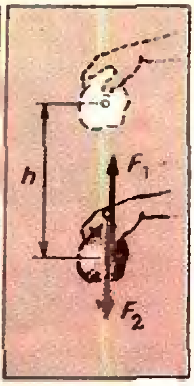


Рис. 7. При падении камня на Землю сила тяготения, приложенная к Земному шару, не совершает работы.

Рис. 8. Работа силы $\mathbf{F}_1$, приложенной к камню со стороны руки, в точности равна по величине и противоположна по знаку работе силы $\mathbf{F}_2$, действующей на руку со стороны камня.

боту мы не можем, если не знаем перемещения других тел.

Тем не менее очень часто утверждается, что если внешние по отношению к рассматриваемой системе силы совершают работу $A_{\text{внеш}}$, то силы, приложенные со стороны системы к внешним телам, совершают такую же по величине работу A', имеющую противоположный знак:

$$A_{\text{внеш}} = -A'. \qquad (14)$$

Но ведь так будет лишь в том случае, когда рассматриваемая система и внешние тела совершают одинаковые перемещения. А это имеет место далеко не всегда. Силы по третьему закону Ньютона обязательно равны по величине и противоположны по направлению, но перемещения не обязаны быть равными.

В качестве примера рассмотрим две простейшие системы: Земной шар и падающий на него камень*). Тогда силы тяготения и для Земли и для камня будут считаться внешними силами. Сила тяжести, приложенная к камню, совершит работу $A_{\text{внеш}} = mgh$, а сила, приложенная к Земле, никакой работы не совершит, так как Земной шар не смещается (рис. 7): $A' = 0$.

Иное дело, если, например, камень поднимают рукой (рис. 8). Тогда работа внешней силы $\mathbf{F}_1$, приложенной к камню, в точности равна по величине и противоположна по знаку работе силы $\mathbf{F}_2$, приложенной к руке со стороны камня. Точно так же работа, которую совершает двигатель, связанный ременной передачей со станком, равна по величине и противоположна по знаку работе, совершаемой станком над двигателем.

Выясним детальнее, с точки зрения закона сохранения энергии, условия, при которых выполняется равенство (14). Пусть имеется незамкнутая система I из двух тел. На них действуют внешние силы со стороны третьего тела (системы II). Системы I и II в целом замкнуты (рис. 9).

Согласно второму закону Ньютона

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}, \\ m_2\mathbf{a}_2 &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23}, \\ m_3\mathbf{a}_3 &= \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}. \end{aligned} \qquad (15)$$

Силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ являются внутренними для системы I, а силы $\mathbf{F}_{13}$ и $\mathbf{F}_{23}$ — внешними. Система II состоит из одного тела, и все действующие на нее силы являются внешними.

Пусть за малое время первое тело переместилось на $\Delta\mathbf{s}_1$, второе на $\Delta\mathbf{s}_2$, а третье на $\Delta\mathbf{s}_3$. Умножим уравнения (15) на $\Delta\mathbf{s}_1$, $\Delta\mathbf{s}_2$ и $\Delta\mathbf{s}_3$ соответственно. Тогда, учитывая, что $m_i(\mathbf{a}_i\Delta\mathbf{s}_i) = \Delta K_i$, получим

$$\begin{aligned} \Delta K_1 &= (\mathbf{F}_{12}\Delta\mathbf{s}_1) + (\mathbf{F}_{13}\Delta\mathbf{s}_1), \\ \Delta K_2 &= (\mathbf{F}_{21}\Delta\mathbf{s}_2) + (\mathbf{F}_{23}\Delta\mathbf{s}_2), \\ \Delta K_3 &= (\mathbf{F}_{31}\Delta\mathbf{s}_3) + (\mathbf{F}_{32}\Delta\mathbf{s}_3). \end{aligned} \qquad (16)$$

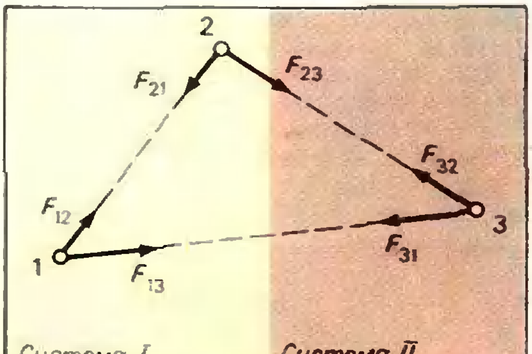


Рис. 9. Взаимодействие между системами I и II, изолированными от внешнего мира.

*) Мы имеем полное право любую группу тел или одно тело считать рассматриваемой системой. Это вопрос удобства.

Складывая первые два уравнения системы (16) и учитывая, что $(\mathbf{F}_{12}\Delta\mathbf{s}_1)+(\mathbf{F}_{21}\Delta\mathbf{s}_2)$ есть изменение энергии взаимодействия системы I, взятое со знаком минус, а $(\mathbf{F}_{13}\Delta\mathbf{s}_1)+(\mathbf{F}_{23}\Delta\mathbf{s}_2)$ есть работа внешних сил, получим

$$\Delta(K_1+K_2)+\Delta\Pi_I=A_{внеш}. \qquad (17)$$

Знакомый результат: изменение механической энергии системы равно работе внешних сил.

Согласно третьему уравнению системы (16)

$$\Delta K_3=A', \qquad (18)$$

где A' — работа сил системы I над системой II.

Сложив уравнения (17) и (18), будем иметь

$$\Delta(K_1+K_2)+\Delta\Pi_I+\Delta K_3=\Delta E_I+\Delta E_{II}=$$
$$=A_{внеш}+A'. \qquad (19)$$

Здесь $E_I=K_1+K_2+\Pi_I$ — полная энергия первой системы, а $E_{II}=K_3$ — энергия второй системы. Отсюда видно, что

$$A_{внеш}=-A',$$

если

$$\Delta E_I=-\Delta E_{II}, \qquad (20)$$

то есть если убыль энергии первой системы равна увеличению энергии второй (или наоборот).

Потенциальная энергия взаимодействия системы с внешними телами

Условие равенства работ (равенство (14)) можно записать по-другому, если ввести понятие потенциальной энергии взаимодействия рассматриваемых систем. Перепишем уравнение (19) в развернутом виде, подставив выражения для работ $A_{внеш}$ и A':

$$\Delta E_I+\Delta E_{II}=(\mathbf{F}_{13}\Delta\mathbf{s}_1)+(\mathbf{F}_{23}\Delta\mathbf{s}_2)+$$
$$+(\mathbf{F}_{31}\Delta\mathbf{s}_3)+(\mathbf{F}_{32}\Delta\mathbf{s}_3). \qquad (21)$$

Пусть силы взаимодействия тел системы I с системой II являются консервативными. Тогда $(\mathbf{F}_{13}\Delta\mathbf{s}_1)+(\mathbf{F}_{31}\Delta\mathbf{s}_3)=-\Delta\Pi_{13}$, а $(\mathbf{F}_{23}\Delta\mathbf{s}_2)+(\mathbf{F}_{32}\Delta\mathbf{s}_3)=-\Delta\Pi_{23}$, где Π_{13} и Π_{23} — потенциальные энергии взаимодействия тел 1—3 и 2—3. Сумма

$$\Pi_{13}+\Pi_{23}=\Pi_{I-II} \qquad (22)$$

представляет собой потенциальную энергию взаимодействия систем I — II. Ее можно назвать потенциальной энергией взаимодействия системы I с внешним телом 3.

Теперь равенство (22) запишем так:

$$\Delta E_I+\Delta E_{II}=-\Delta\Pi_{I-II},$$

или

$$\Delta(E_I+E_{II}+\Pi_{I-II})=0. \qquad (23)$$

Значит, $\Delta E_I=-\Delta E_{II}$ и, следовательно, $A_{внеш}=-A'$ в том случае, когда $\Delta\Pi_{I-II}=0$, то есть когда потенциальная энергия взаимодействия систем не меняется.

Когда двигатель вращает станок, то потенциальная энергия их взаимодействия (энергия растянутого приводного ремня) остается неизменной. При падении же камня на Землю потенциальная энергия взаимодействия меняется. Поэтому в первом случае $A_{внеш}=-A'$, а во втором это равенство не выполняется.

Роль сил трения

Силами, зависящими от скорости, в механике являются силы трения. Как и все силы, силы трения изменяют кинетическую энергию системы. Причем, хотя силы трения могут совершать и положительную работу, суммарная работа сил трения внутри системы всегда отрицательна, и они уменьшают кинетическую энергию системы. Понять, почему так происходит, можно на таком примере.

Найдем изменение кинетической энергии в системе, состоящей из тележки массы M, движущейся без трения со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности, и кирпича массы m, положенного на тележку в начальный момент времени (рис. 10). Пусть кирпич сначала скользит по тележке и проходит относительно нее расстояние l. После этого кирпич движется вместе с тележкой. Коэффициент трения между кирпичом и тележкой равен k.

За время t тележка пройдет относительно земли путь s, а скользя-

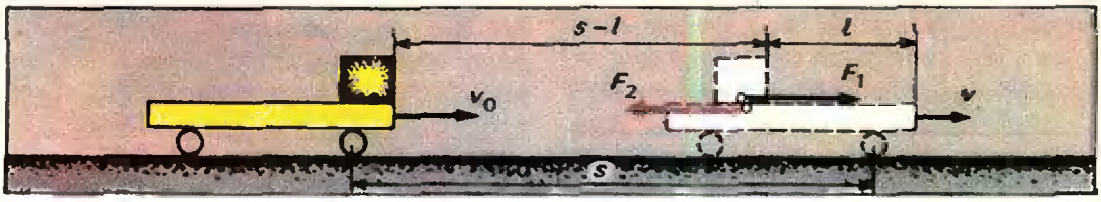


Рис. 10. Отрицательная работа на пути s больше положительной работы на пути $s-l$.

щий по ней кирпич пройдет путь $s-l$. После этого они будут двигаться с одинаковой скоростью v.

Сила трения скольжения $F_1 = kmg$ совершит над кирпичом положительную работу, которая увеличит кинетическую энергию кирпича:

$$A_1 = kmg(s-l) = \Delta K_1 = \frac{mv^2}{2}.$$

Работа силы трения $F_2 = -kmg$, действующей на тележку, будет отрицательной, что вызовет уменьшение кинетической энергии тележки:

$$A_2 = -kmgs = \Delta K_2 = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2}.$$

Складывая почленно эти уравнения, получим, что

$$\frac{(M+m)v^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -kmgl,$$

то есть убыль кинетической энергии системы равна работе силы трения на пути, равном относительному перемещению кирпича и тележки.

Итак, работа силы трения ведет к убыли кинетической энергии системы. Но при этом под действием силы трения потенциальная энергия системы не увеличивается, как это происходит под действием консервативных сил. Это является следствием того, что силы трения зависят не от расстояний между телами, а от их относительных скоростей. В результате работа этих сил зависит от формы траектории тела, а не только от его начального и конечного положений в пространстве. Силы трения, действующие внутри системы, изменяют кинетическую энергию системы так же, как и внешние силы. Поэтому при наличии сил трения в замкнутой системе ее механическая энергия убывает:

$$\Delta E = A_{\text{тр}} < 0.$$

В связи со сказанным может возникнуть такой вопрос. Известно, что сила трения может поднять кирпич на движущемся с постоянной скоростью транспортере. Не означает ли это, что работа этой силы увеличивает потенциальную энергию системы кирпич — Земля? Конечно, нет. В данном случае положительная работа силы трения равна отрицательной работе составляющей силы тяжести вдоль наклонной плоскости. Из-за этого кинетическая энергия кирпича не меняется. Потенциальная же энергия кирпича растет, так как сила взаимодействия между Землей и кирпичом, то есть сила тяжести, совершает при подъеме кирпича отрицательную работу.

Упражнения

1. Почему при абсолютно упругом соударении шарика со стенкой импульс шарика меняется, а кинетическая энергия не меняется?

2. Закрытый пробкой сосуд, вес которого равен выталкивающей силе, покоится на дне стакана с водой. Почти не совершая работы, его можно поднять к поверхности воды. Если теперь вынуть пробку, то сосуд наполнится водой и утонет. При этом он может совершить работу. Если же вынуть пробку, когда сосуд лежит на дне, то он также наполнится водой, но работы не совершит.

Как согласовать полученный в первом случае выигрыш в работе с законом сохранения энергии?

3. Кубик соскальзывает без трения с наклонной плоскости высотой h. Согласно закону сохранения энергии его кинетическая энергия у основания плоскости равна $\frac{mv^2}{2} = mgh$. Рассмотрим теперь движение кубика с точки зрения инерциальной системы отсчета, движущейся вдоль наклонной плоскости со скоростью $v = \sqrt{2gh}$. В этой системе отсчета начальная скорость кубика равна $v = \sqrt{2gh}$, а конечная скорость равна нулю. Следовательно, начальная энергия $E_1 = \frac{mv^2}{2} + mgh = 2mgh$, а конечная $E_2 = 0$.

Куда же исчезла энергия?

4. Рассматривая падение камня на Землю, мы говорим об изменении импульса Земли, о том, что оно равно изменению импульса камня, а изменение кинетической энергии Земли при этом не учитывается. Как это можно объяснить?

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Мы помещаем ниже образцы вариантов письменного экзамена по математике и билетов устного экзамена по физике, предлагавшихся в 1973 году поступающим на естественные факультеты Московского университета.

Математика

Химический факультет

1. Алик, Боря и Вася покупали трехкопеечные карандаши и блокноты. Алик купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря — 6 карандашей и блокнот, Вася — 3 карандаша и блокнот. Оказалось, что суммы, которые уплатили Алик, Боря и Вася, образуют геометрическую прогрессию. Сколько стоит блокнот?

2. Решить неравенство

$$\log_4 (5-3^x)\cdot \log_2\left(\frac{5-3^x}{8}\right)\geqslant -1.$$

3. Найти все действительные x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x+1}}.$$

4. Плоскость основания правильной четырехугольной пирамиды проходит через центр шара, причем получающийся в сечении большой круг шара вписан в основание пирамиды. Внутрь пирамиды помещен еще один шар, касающийся боковых граней пирамиды и первого шара. Известно, что радиус второго шара равен 2, а точка касания шаров отстоит от основания пирамиды на расстояние, равное одной трети высоты пирамиды. Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

5. В прямоугольный треугольник ACB вписан квадрат $CEKM$ так, что его вершина K лежит на гипотенузе AB, а вершины E и M — на катетах. Сторона этого квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник ACB, как $(2+\sqrt{2}):2$. Найти углы треугольника ACB.

Факультет биологии

1. Три каменщика (разной квалификации) выложили кирпичную стенку, причем первый каменщик работал 6 часов, второй 4 часа и третий 7 часов. Если бы первый каменщик работал 4 часа, второй 2 часа и третий 5 часов, то было бы выполнено лишь $^2/_3$ всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали все вместе одно и то же время?

2. Решить уравнение

$$2\cos 2x-1=(2\cos 2x+1)\,\mathrm{tg}\,x.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{\sin 2x}(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)=1-\log^2_{\sin 2x}2.$$

4. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найти площадь четырехугольника $QMCD$.

5. Найти все значения действительного параметра a, для которых неравенство

$$4^x-a\cdot 2^x-a+3\leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Геологический факультет

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sin(x+y)=\dfrac{3}{2},\\[2mm] 3x-\sin(x+y)=\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$4^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4<0.$$

3. Два велосипедиста выехали из пункта A одновременно и в одном направлении. Первый велосипедист едет со скоростью 7 *км/ч*, второй — со скоростью 10 *км/ч*. Через 30 *мин* из пункта A в том же направлении выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал первого велосипедиста, а еще через полтора часа после этого догнал и второго велосипедиста. Определить скорость третьего велосипедиста.

4. Решить неравенство

$$\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4>0.$$

5. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным внутри этого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую его сторону в точках A и B и пересекает биссектрису прямого угла в точках C и D. Известно, что $AB=\sqrt{6}$ *см*, $CD=\sqrt{7}$ *см*. Найти радиус окружности.

Факультет почвоведения

1. Общий вес снаряжения туристской группы 202 *кг*. Если распределить его так, чтобы каждому юноше пришлось нести по 16 *кг*, а каждой девушке — по 9 *кг*, то 4 *кг* останутся нераспределенными. Поэтому все

юноши берут себе еще по 2 *кг* каждый, в результате чего удается облегчить рюкзак каждой девушки на 1 *кг*, а одну из них освободить от груза вовсе; при этом все снаряжение оказывается распределенным. Сколько юношей и сколько девушек участвуют в походе?

2. Что больше:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\log_{81}\left(\frac{1}{27}\right)$$

или

$$\sin\frac{43\pi}{6}\,\mathrm{tg}^3\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\mathrm{ctg}\frac{4\pi}{3}\ ?$$

3. Решить уравнение

$$\cos x(\sqrt{3}+\cos x)-1=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}-\sin x(\sqrt{3}+\sin x).$$

4. Две окружности радиуса 32 с центрами в точках O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найти радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и касается отрезка O_1O_2.

5. Найти все действительные решения уравнения

$$\log_2(x^2+7)=5+\log_2 x-\frac{6}{\log_2\left(x+\frac{7}{x}\right)}.$$

Географический факультет

1. На прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работу на 30 минут раньше второго. Когда второй экскаватор прокопал 27 *м*, оказалось, что он отстает от первого на 1 *м*. Сколько метров в час проходит каждый из экскаваторов, если известно, что второй прокапывает в час на 4 *м* больше, чем первый?

2. Упростить выражение

$$5^{\log_{1/5}(1/2)}+\log_{1/2}\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\log_{1/2}\frac{1}{10+2\sqrt{21}}.$$

3. Сторона AB квадрата $ABCD$ является хордой некоторой окружности, а все остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина отрезка касательной, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности, если сторона квадрата равна 1?

4. Найти решения уравнения

$$3^{x^2+4x}=\frac{1}{25},$$

удовлетворяющие неравенству $x>-3$.

5. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=2\sqrt{2+2\cos 2x}.$$

Физика

Билет 1

1. Точечные заряды $q_1=-1{,}7\cdot 10^{-8}$ *к* и $q_2=2\cdot 10^{-8}$ *к* находятся от точечного заряда $q_0=3\cdot 10^{-8}$ *к* на расстояниях $l_1=2$ *см* и $l_2=5$ *см* соответственно. Какую работу A надо совершить, чтобы поменять местами заряды q_1 и q_2?

2. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. График скорости равнопеременного движения с начальной скоростью. Свободное падение тел.

3. Законы отражения света. Построение изображений в плоском зеркале. Построение изображений в сферических зеркалах.

Билет 2

1. Самолет массы $m=2{,}5$ *т* с выключенным мотором спускается, планируя, с постоянной скоростью $v=144$ *км/ч* с высоты $h_1=2$ *км* до высоты $h_2=1$ *км*, пролетев при этом расстояние $l=10$ *км*. Какую мощность W должен развивать мотор самолета, чтобы он мог подняться до высоты h_1, пролетев расстояние l с той же скоростью?

2. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Индукция магнитного поля. Амперметр. Вольтметр.

3. Собирающие и рассеивающие линзы. Формула линзы. Построение изображений.

Билет 3

1. В бассейн с водой погружен опрокинутый вверх дном тонкостенный цилиндрический сосуд с высотой $h=1$ *м* и площадью дна $S=0{,}1$ *м*^{2}. Сосуд заполнен жидким маслом плотностью $\rho=800$ *кг/м*^{3}. От дна сосуда до поверхности воды расстояние $H=2$ *м*. Найти силу F, действующую изнутри сосуда на его дно. Атмосферное давление $p_0=10^5$ *н/м*^{2}.

2. Два рода электричества. Взаимодействие электрических зарядов. Закон Кулона. Влияние среды на силу взаимодействия зарядов. Диэлектрическая проницаемость.

3. Проекционный аппарат. Фотоаппарат. Лупа. Ход лучей в этих приборах.

Билет 4

1. Точка лежит на главной оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $f=25$ *см*. Расстояние от линзы до изображения этой точки $b=15$ *см*. На какое расстояние l переместится изображение точки, если саму линзу подвинуть на расстояние $L=2$ *см* в направлении, перпендикулярном главной оптической оси?

2. Понятие о потенциале. Потенциал поля для точечного заряда (без вывода). Работа перемещения заряда в электрическом поле. Разность потенциалов. Связь потенциала с напряженностью для однородного поля.

3. Явления, подтверждающие сложное строение атома. Способы наблюдения частиц. Строение атома. Излучение и поглощение энергии атомом.

Телевидение готовит в вуз

Физика

В течение января — марта 1974 года на физическом отделении телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы *) читались лекции и проводились практические занятия по теме «Основы электродинамики». Для знакомства читателей журнала с уровнем трудности домашних заданий (которые систематически публикуются в еженедельнике «Говорит и показывает Москва») мы приводим ниже несколько задач на законы постоянного тока, на магнитное взаимодействие токов, на явление электромагнитной индукции и переменный ток.

1. Конденсатор емкости $C = 10$ *мкф* включен в цепь постоянного тока (см. рис.). Определить заряд конденсатора, если $R = 4{,}0$ *ом*, $E_1 = 5{,}0$ *в*, $E_2 = 2{,}0$ *в* и $r_1 = r_2 = 1{,}0$ *ом*.

2. Элемент с внутренним сопротивлением $r = 2$ *ом* замкнут на сопротивление $R_1 = 8$ *ом*. Какое другое сопротивление R_2 надо подключить к этому элементу, чтобы мощность, выделяемая во внешней цепи, была такая же, как и в первом случае?

3. Электроплитка имеет два нагревателя. При включении в сеть одного нагревателя $V_1 = 0{,}5$ *л* воды закипает через $t_1 = 10$ *мин*; при включении второго нагревателя $V_2 = 1{,}0$ *л* воды закипает через $t_2 = 15$ *мин*. Через сколько минут закипит на плитке $V_3 = 2{,}0$ *л* воды, если оба нагревателя включить последовательно в ту же сеть?

4. Водород, выделяющийся при электролизе раствора поваренной соли в воде, собирается в сосуд объемом $V = 0{,}5$ *л*. Через некоторое время давление водорода в сосуде становится $p = 1{,}3$ *атм* при температуре $t = 27°$ С. Найти работу, совершенную источником тока при электролизе, если разность потенциалов между электродами $U = 25$ *в*.

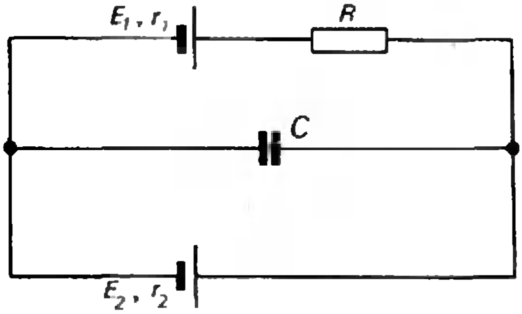
5. По трем длинным прямым параллельным проводникам пренебрежимо малого сечения, расположенным в воздухе на одинаковых расстояниях $a = 20$ *см* друг от друга, текут в одном направлении токи $I_1 = 4{,}0$ *а*, $I_2 = 6{,}0$ *а* и $I_3 = 10$ *а*. Найти магнитную индукцию в точках, равноудаленных от всех трех проводников.

6. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ *тл* равномерно вращается металлический стержень длиной $l = 1$ *м*. Плоскость вращения стержня перпендикулярна вектору индукции магнитного поля. Определить частоту вращения стержня ν, если э.д.с. индукции, возникающая на концах стержня, $E_{инд} = 2$ *в*.

7. По двум вертикальным сторонам П-образной рамки, находящейся в магнитном поле с индукцией $B = 2$ *тл*, скользит без трения с постоянной скоростью, не теряя электрического контакта, проводник с сопротивлением $R = 4$ *ом* и массой $m = 10$ *г*. Определить скорость движения проводника, если расстояние между сторонами рамки $l = 1$ *м* и вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости рамки.

8. На конце линии передачи электроэнергии с общим сопротивлением $R = 50$ *ом* установлен понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации $k = 5$. Потребитель получает от трансформатора мощность $P = 400$ *вт* при токе $I = 10$ *а*. Определить активное сопротивление вторичной обмотки трансформатора, если напряжение в начале линии $U = 500$ *в*. Активным со-

*) Подробнее об этих курсах см. статью: Качанов А. В., Наслузов И. И. «Телевидение готовит в вуз» («Квант», 1973, № 9).



противлением первичной обмотки и тепловыми потерями в трансформаторе пренебречь.

9. Сопротивление $R = 220$ *ом* и конденсатор подсоединены параллельно к источнику переменного тока с частотой $\nu = 400$ *гц*. Найти емкость конденсатора, если амплитудное значение тока через сопротивление $I_{0_1} = 1$ *а*, а через конденсатор $I_{0_2} = 2$ *а*.

10. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ *тл* равномерно вращается вокруг оси, перпендикулярной полю, квадратная рамка со стороной $a = 20$ *см*. Определить частоту вращения рамки, состоящей из $n = 100$ витков, если при подключении ее к катушке с индуктивностью $L = 0{,}5$ *гн* действующее значение напряжения на катушке $U = 20$ *в*. Сопротивление рамки $R = 5$ *ом*. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

Математика

В феврале для слушателей отделения математики телекурсов проводилось очное собеседование. Приглашенным на собеседование были предложены два варианта, включающие задачи по пройденным ранее темам. Собеседование проводилось в условиях, сходных с теми, которые бывают на вступительных экзаменах. Мы публикуем тексты обоих вариантов.

Вариант 1

1 (Белорусский ун-т, 1973). Доказать, что выражение

$$\frac{1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)},$$

где $\alpha \neq \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, не зависит от α.

2. В треугольнике ABC известны два угла: $\angle A=\alpha$, $\angle C=\beta$. Из вершины B проведены высота BH и медиана BM. Найти площадь треугольника BMH, если $BH=h$.

3 (УДН, 1973). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(x+y), \\ x^3+y^3=4(x+y). \end{cases}$$

4 (МФТИ, 1971). Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x=\cos^2 3x.$$

Вариант 2

1 (МИФИ, 1971). Найти два целых положительных числа, зная, что их сумма равна 85, а их наименьшее общее кратное равно 102.

2. Две окружности h и l радиусов R и r $(R>r)$ касаются в точке A. Определить сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке A, другая вершина лежит на окружности h и третья — на окружности l.

3 (МГУ, 1973). Найти все пары значений x, y, являющиеся решением системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin x+\dfrac{1}{\cos y}=2\sqrt[4]{14}, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y}=\sqrt[4]{196}-2. \end{cases}$$

4 (Ленинградский политехнический ин-т, 1972). Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x-8\cos^2 x+\operatorname{tg} 2x=0.$$

В марте на телекурсах читаются лекции по темам: «Показательные и логарифмические функции», «Логарифмы и их свойства», «Показательные уравнения и неравенства», «Логарифмические неравенства». В этом номере мы предлагаем ряд задач из домашних заданий для слушателей телекурсов.

Задачи

1. Упростить выражение

$$\left[\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right]^{1/2},$$

если $1<a<b$.

2. Расположить в порядке возрастания числа

$$a=\log_{63}27, \quad b=\log_{21}9, \quad c=\log_{189}81.$$

3. Решить уравнение

$$(x-1)2^x+x^2-2x+1=0.$$

4. Решить уравнение

$$2(2^{2x}+2^{-2x})+7(2^x-2^{-x})-19=0.$$

5. Решить уравнение

$$x+\lg(2^x-3)=\lg 4+x\lg 5.$$

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^{\log_3 y}+2\cdot y^{\log_3 x}=27, \\ \log_3 x-\log_3 y=1. \end{cases}$$

7. Решить неравенство

$$\sqrt{1+\log_4 x}-\sqrt{3\log_4 x}>2\log_4 x-1.$$

8. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x+9}\right)\log_3\frac{2x^2+x-3}{3}\geqslant 0.$$

А. Н. Борзяк,
В. И. Давыдов,
И. А. Дьяконов,
Н. Т. Дыбов

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Удачная серия

Многим читателям «Кванта» известны выпускаемые московскими издательствами серии научно-популярных книг и брошюр по математике, рассчитанных на учащихся средней школы. На первом месте среди этих серий стоят выходящие с 1950 года брошюры «Популярные лекции по математике» — к настоящему времени вышли в свет уже 52 книжки этого обширного собрания! В более молодой серии «Библиотечка физико-математической школы» выпущено 8 книг по математике *), а «Библиотека математического кружка» состоит из 12 довольно больших по объему книг. Все эти книги выпустила главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»; этому же издательству принадлежит инициатива выпуска «Математической библиотечки» (вышло в свет 7 книг), быть может, несколько более сложной, чем «Популярные лекции по математике» или «Библиотечка физико-математической школы», но в основной своей части также доступной достаточно настойчивому школьнику. Издательство «Мир» выпускает серию научно-популярных переводных книг «Современная математика» (вышло в свет 14 книг), а издательство «Просвещение» — серию «Математическое просвещение» (на прилавках книжных магазинов побывало пока 7 книг этой серии). Многие из этих книг также вполне доступны интересующимся математикой школьникам. По существу, в отдельном ряду стоят неоднократно упоминавшиеся в журнале «Квант» превосходные переводные книги М. Гарднера («Математические головоломки и развлечения», 1971; «Математические досуги», 1972) и Льюиса Кэролла («История с узелками», 1973), выпущенные редакцией научно-популярной и научно-фантастической литературы издательства «Мир». Ежемесячно выходят в свет брошюры серии «Математика. Кибернетика» издательства «Знание»; некоторые из них вполне можно рекомендовать и школьникам. Наконец, эпизодически появляются книги по математике в «общенаучных» сериях «Эврика» (издательство «Молодая гвардия») и «В мире науки и техники» (переводная серия, выпускаемая издательством «Мир» *)).

Менее известны книги такого же рода, выходящие вне Москвы. И именно поэтому хотелось бы обратить внимание читателей «Кванта» на книги серии «Бібліотечка фізико-математичної школи», выходящие в издательстве «Вища школа» в Киеве (главный редактор математической части серии — чл.-корр. Академии наук УССР профессор А. В. Скороход). В 1972 году было издано 5 книг этой серии: А. Я. Дороговцев, М. И. Ядренко. Метод координат; Н. И. Кованцев. Геометрические преобразования; В. А. Вышенский. Отношения и функции; И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. Элементы комбинаторики; Ю. М. Рыжов. Пределы. Все эти книги написаны на украинском языке; однако их возможные читатели — не одни лишь украинские школьники: ведь украинский язык близок к русскому, а сочинения по математике можно читать и на слабо известном (или даже вовсе неизвестном) языке, ибо математическая символика универсальна, а математическая терминология также практически одинакова во всех европейских языках (кроме, пожалуй, венгерского, финского и эстонского, принадлежащих к редкой в Европе группе угро-финских языков, и польского языка, использующего свойственную лишь ему и далекую от принятых во всех других странах математическую терминологию).

Книжки названной серии по объему близки к брошюрам из ряда «Популярные лекции по математике»; по содержанию же они являются в известном смысле промежуточными между «Популярными лекциями по математике» и «Библиотечкой физико-математической школы». Для того чтобы читатель смог лучше себе их представить, расскажем здесь подробнее о двух очень разных и, быть может, самых удачных из этих брошюр (хотя и вся серия в целом заслуживает высокой оценки) «Элементы комбинаторики» и «Отношения и функции»:

*) «Библиотечка физико-математической школы» состоит из двух частей: «Математика» и «Физика».

*) В частности, мне хочется обратить внимание читателей «Кванта» на изданную в этой серии книгу: Сойер У. Путь в современную математику. М., «Мир», 1972.

Автору кажется удачной адресованная школьникам «Комбинаторика» Н. Я. Виленкина *); однако кое-кого их учащихся может отпугнуть уже объем этой довольно толстой книги (328 страниц). Содержательная же брошюра Н. И. Ежова, А. В. Скорохода и М. Н. Ядренко имеет всего лишь 83 страницы малого формата.

Вводный § 1 посвящен обсуждению содержания комбинаторики и формулировке «основного правила», которое в нашей литературе зачастую называется *правилом произведения* или *правилом умножения*. Последующие два параграфа посвящены конечным множествам и операциям над ними, а также числу подмножеств конечного множества; к этому материалу в известной степени примыкает используемый во второй половине книги § 7, в котором разъясняется понятие *прямого* (или *декартова*) *произведения* $A \times B$ конечных множеств A и B (то есть множества пар (a, b) элементов из A и из B). §§ 4—6 посвящены *упорядоченным множествам*. Затем на языке конечных множеств излагаются некоторые основные понятия комбинаторики и решаются задачи о числе *перестановок*, *размещений* и *сочетаний* (*без повторений* и *с повторениями*) элементов заданного (конечного) множества.

§§ 4—7 книжки Н. И. Ежова, А. В. Скорохода, М. Н. Ядренко составляют ее, так сказать, «первый концентр»; §§ 8—12, посвященные некоторым более специальным (но зато и более интересным!) темам, можно рассматривать как «второй концентр». В § 8 авторы доказывают *биномиальную* и *полиномиальную* теоремы, то есть выводят формулы для выражений $(a+b)^n$ и $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$, где n — целое число. Украшением этого параграфа служат выведенные в нем изящные соотношения между так называемыми *биномиальными коэффициентами* (то есть коэффициентами C_n^m в формуле для $(a+b)^n$); еще больше таких соотношений читатель найдет в упражнениях к § 9. Последующие параграфы посвящены двум основным специальным методам комбинаторики — методу *рекуррентных соотношений* (ср., например, гл. VI книги Н. Я. Виленкина) и методу *производящих функций* (частично затронутому в гл. VII той же книги). Отдельный § 11 содержит обсуждение так называемой *формулы включений и исключений* (см. с. 26 книги Виленкина) и ее приложений. Наконец, заключительный § 12 посвящен *методу траекторий*, которым решается, например, известная «задача об очереди» (*в очереди в билетную кассу стоят $m+n$ человек, m из которых имеют 50 коп. мелочью, а n — лишь бумажные рубли; если билет стоит 50 коп., то сколькими способами можно расположить очередь так, чтобы никому из покупателей не пришлось ждать сдачи*?).

Если книжка Н. И. Ежова и др. посвящена совершенно конкретным математическим задачам, то в книге В. А. Вышенского, напротив, на первом плане стоят общие понятия. Его книжка состоит из двух глав: «Множества» и «Отношения»; некоторое представление об ее направленности читатель может получить из статей А. Н. Колмогорова «Что такое функция» и «Что такое график функции» («Квант», 1970, №№ 1, 2). При этом важные понятия множества и операций над множествами, импликации (следования) и эквивалентности (равносильности), предикатов и кванторов, отношений и функций автор раскрывает на достаточно содержательных примерах (к тому же близких учащимся средней школы!). Так, например, на протяжении всей книги используется понятие *множества решений уравнения* (или неравенства, системы уравнений, системы неравенств). Существенной компонентой книжки В. А. Вышенского являются также многочисленные задачи и упражнения.

В целом мне кажется, что интересные книги Н. И. Ежова, А. В. Скорохода, М. Н. Ядренко и В. А. Вышенского было бы полезно перевести и на русский язык. Издателям же серии «Бібліотечка фізико-математичної школи» хочется пожелать успешного продолжения серии.

И. М. Яглом

---

*) Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М., «Наука», 1969.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Новые книги

В 1974 году мы продолжаем публикацию раздела «Новые книги». В этом разделе будут публиковаться краткие аннотации на уже вышедшие книги и на книги, которые выходят в 1974 году, и представляют интерес для наших читателей. В связи с многочисленными просьбами читателей мы также будем публиковать аннотации на некоторые книги, выходящие в издательствах «Молодая гвардия», «Детская литература», «Мир» и «Знание», и не имеющие прямого отношения к математике и физике.

Заказы на книги надо одновременно оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие в 1-м квартале 1974 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И., *Лекции и задачи по элементарной математике*. Объем 28 л., тираж 200 000 экз., цена 87 коп. Издание 2-е.

Книга предназначена в первую очередь для самостоятельной подготовки в вузы. Теоретический материал, изложенный в книге, посвящен наиболее трудным вопросам школьной программы алгебры и элементарных функций. Большое количество задач (зачастую повышенной трудности) приведено с подробным решением.

Книга предназначена для школьников 9—10 классов. Она также будет полезна учителям математики и студентам педагогических вузов.

2. Васильев Н. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Савин А. П., *Математические соревнования (геометрия)*. Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 16 коп.

Эта книга — логическое продолжение ранее вышедшей — «Математические соревнования» (арифметика и алгебра). В ней представлены как задачи традиционных разделов геометрии, так и задачи «олимпиадного типа». К задачам повышенной трудности даются подробные решения или указания.

Книга рассчитана на школьников 7—10 классов, а также учителей, ведущих математические кружки.

3. Перельман Я. И. *Живая математика*. Объем 8 л., тираж 200 000 экз., цена 28 коп. Издание 10-е.

Автор книги — Яков Исидорович Перельман — один из выдающихся популяризаторов науки. Ее с удовольствием прочтут и школьники 6—10 классов, и взрослые читатели.

Издательство «Знание»

4. Шрейдер Ю. А., *Беседы о семиотике*. Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 коп.

Автор интересно и популярно рассказывает о новой отрасли знания — семиотике, тесно примыкающей к математической лингвистике и математической логике.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Высшая школа».

5. Шувалова О. З., Агафонов Б. Г., Богатырев Г. И., *Повторим математику*. Объем 30 л., тираж 150 000 экз., цена 1 р. 09 коп. Издание 2-е.

Книга предназначена для читателей, окончивших школу и самостоятельно готовящихся к вступительным экзаменам в вузы.

М. Л. Смолянский

Физика

Издательство «Наука»

1. Новожилов Ю. В., *Элементарные частицы*. Объем 15 л., тираж 300 000 экз., цена 50 коп. Издание 3-е.

Автор излагает основные идеи одного из самых интересных разделов современной физики — физики элементарных частиц. Популярное изложение и отсутствие сложных математических выводов делают ее доступной для школьников 9—10 классов.

Издательство «Мир»

2. Кок У., *Видимый звук*. Объем 5 л., тираж 50 000 экз., цена 26 коп.

В книге рассказано о способах регистрации звука, о звуковой структуре речи, музыки. Большое внимание уделено звуковой голографии — получению изображения при помощи освещения звуковой волны.

Книга доступна для школьников 8—10 классов.

3. Уорд Р. Р., *Живые часы*. Объем 15 л., тираж 50 000 экз., цена 76 коп.

Книга посвящена новой области современной геофизики — биоритмологии. Прочитав ее, вы узнаете, что такое «внутренние часы живых организмов», каковы принципы их работы, как животные и растения узнают время, и многое другое.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

4. Тарасенко Н. Д., *Вторжение в клетку*. Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 25 коп. Издание 3-е.

В книге популярно рассказывается о новой науке — радиационной селекции, о том, как ученые-генетики, пользуясь радиоактивным излучением, получают новые, более урожайные, скороспелые и устойчивые к болезням сорта растений.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Научно-фантастическая литература

Издательство «Молодая гвардия»

1. Петрович Н., *Кто вы?* Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 60 коп. Издание 2-е.

Автор — крупный ученый в области радиолокации. Используя фантастический сюжет, он увлекательно рассказывает о создании радиомостов между Землей и другими планетами, населенными разумными существами.

2. Растригин Л., *Этот случайный, случайный, случайный мир*. Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 35 коп.

Используя интересно подобранные примеры, автор рассказывает о закономерности случайных событий, о их роли в нашей жизни в науке и эволюции на Земле.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Т. С. Петрова

Брошюры по физике

В этом году в серии брошюр «Физика», выпускаемых издательством «Знание», будет издан ряд брошюр, рассказывающих о достижениях в различных областях физики.

Брошюра Г. И. Покровского *«Успехи газодинамики»* посвящена различным аспектам газодинамики Автор излагает множество вопросов, относящихся к физическим основам динамики детонации, расширения взрывных газов и их действия на окружающую среду. Читатели, вероятно, с интересом познакомятся с особенностями взрывов сверхновых звезд и явлениями направленного выброса при взрыве галактик.

Достижениям атомной энергетики и тенденциям ее развития в наиболее развитых странах запада посвящена брошюра Председателя Госкомитета по использованию атомной энергии СССР А. М. Петросьянца. Она написана на основе личного ознакомления с наиболее интересными разработками, проектами и атомными электростанциями, находящимися уже в эксплуатации в странах запада.

Брошюра Ю. Ф. Орлова *«Импульсные источники нейтронов»* описывает различные методы получения коротких импульсов монохроматических нейтронов низких энергий. Автор особое внимание уделяет изложению физических принципов, лежащих в основе этих методов.

Брошюра М. П. Малкова познакомит читателей с применением жидкого гелия в экспериментальных исследованиях. Она так и называется *«Жидкий гелий в научных исследованиях»*. Автор описывает новейшие методы получения жидкого гелия. Основная часть брошюры посвящена наиболее интересным экспериментальным исследованиям с применением жидкого гелия.

Брошюра А. С. Компанейца *«Сверхплотное вещество»* рассматривает превращения, происходящие в веществе при сильном сжатии и применимые к проблемам создания новых веществ. Превращения, происходящие в веществе при высоких давлениях, в настоящее время являются предметом широко ведущихся исследований в разных странах. Автор рассказывает также о приложении превращений вещества при сильном сжатии к проблемам астрофизики и космологии.

Развитию теории относительности Эйнштейна посвящена научно-популярная брошюра Л. Э. Гуревича и Э. Б. Глинера под названием *«Абсолютно или относительно пространство?»*. Это, по утверждению авторов, одна из тех «вечных» проблем, которые, хотя и не нашли еще полного решения, но продолжают оставаться важными побудительными причинами создания новых и изменения имеющихся фундаментальных физических теорий.

Молодой физик-экспериментатор И. С. Гульков в своей брошюре *«Электрон — орудие исследования ядер»* рассказывает об исследованиях структур ядер с помощью электронов высоких энергий.

Брошюра молодого ученого Ф. И. Далидчика *«Синтетические атомы»* знакомит читателей с одной из интереснейших научных проблем—с синтезом экзотических форм вещества, то есть молекул, атомов и ядер, в состав которых входят необычные для окружающего мира частицы: мезоны, гипероны, античастицы. Автор также пишет о новейших работах по поиску далеких трансурановых элементов и новых экзотических частиц, существование которых предсказывают теоретики.

Ф. Кедров

ИНФОРМАЦИЯ

Встречи с тремя неизвестными

Вот уже 9-й год на страницах журнала «Пионер» трое «неизвестных» Икс, Игрек и Зет дают задачи, разбирают математические теории, проводят олимпиады. Это как бы всесоюзный заочный математический кружок для учеников 4—7 классов. Подбирают материалы для «Встреч с тремя Неизвестными» и отвечают на письма ребят сотрудники Вечерней математической школы (ВМШ) при Московском математическом обществе (подробнее о ВМШ см. «Квант», 1973, № 9).

«Неизвестные» уже рассказали о высшей арифметике и теории вероятностей, поиске фальшивых монет и алгоритмах, программировании и комбинаторике, теории графов и задаче, из-за которой Пуассон стал математиком. Они выясняли, «как играть, чтобы не проиграть», что сказать вместо «не все футболисты учатся на двойки», чтобы не употреблять слово «не», как работать юному математику и что ему читать.

Игрек дает читателям «контрольные задачи» по разбираемым темам, а Икс предлагает им повозиться с «конкурсными задачами» и написать о результатах в «Пионер». Но больше всего писем приходит в ответ на олимпиаду, а в 1973 году в ней участвовало почти три тысячи ребят.

«Неизвестные» всегда печатают решения и ответы, разбор ошибок и список победителей. Приятно встречать фамилии отличившихся на олимпиадах «Пионера» в списках победителей конкурса «Кванта», всесоюзных и международных олимпиад.

Анкета показала, что почти все победители олимпиады 1972 года читают книги по математике, хотя больше любят решать задачи, $^4/_5$ из них занимаются в кружках, $^3/_5$ участвовали в очных олимпиадах, а две трети из них читают и изучают «Квант».

Вот задачи из отдела «Встречи с тремя неизвестными», которые больше всего запомнились победителям олимпиады.

1. Расшифруйте записи арифметических действий, в которых некоторые цифры заменены буквами (в каждой из трех записей по отдельности разные цифры заменены разными буквами, одинаковые — одинаковыми, а в первой шифровке А = Т):

а) КОРОВА + ТРАВА = МОЛОКО;

б) СТОЛ + СТУЛ = = КЛАСС;

в) БЕ × РУ × 4 = = БУЕР.

2. Рядом с большой бочкой с водой стоят два бидона. В один входит 12 литров, в другой — 17. Воду можно набирать из бочки и выливать обратно в бочку. Кто быстрее принесет нам 6 литров воды?

3. Верните сбежавшие цифры:

$$\begin{array}{r|l} 7{*}{*}0 & {*}{*} \\ -{*}6{*} & \overline{{*}4} \\ \hline {*}8{*} & \\ -3{*}{*} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

4. Начертите два шестиугольника, делящие плоскость на возможно большее число частей. А если дополнительно потребовать, чтобы шестиугольники были выпуклыми? Попробуйте доказать, что на большее, чем у вас, число частей разделить плоскость не удастся.

5. Нашли произведение 666 множителей, каждый из которых равен 777. Какая цифра стоит на конце?

6. В комнате 10 живых существ — людей, собак и мух, у них вместе 46 ног. У каждого человека 2 ноги, у каждой собаки 4 и у мухи 6 ног. Как это могло получиться? Найти все возможности.

7. Поле имеет форму четырехугольника. Шоссейные дороги — они идут по диагоналям — разбивают его на четыре участка. Площади трех из них — 2 гектара, 4 гектара, 6 гектаров. Какой может быть площадь четвертого?

8. В одной из московских школ есть удивительный шестой класс. Судите сами. В классе 35 учеников, и все они либо играют на скрипке, либо разводят хомяков, либо плавают в бассейне «Москва», либо занимаются сразу несколькими из этих дел. Плавают или разводят хомяков 28 человек. Разводят хомяков, но не играют на скрипке 22 ученика. И тем, и другим, и третьим занимаются 3 школьника. Есть по крайней мере один, который только плавает. Есть пловец и скрипач, ненавидящий хомяков. Есть и такой, который не плавает (просто не умеет), но зато прекрасный скрипач, а хомяков разводит еще с первого класса. Может быть, таких не по одному, а много. Сколько в классе скрипачей? Сколько пловцов, которые не разводят хомяков? Можно ли определить, сколько ребят разводят хомяков, а на скрипке не играют и не плавают? Если да, то сколько, если нельзя определить, то почему?

А. И. Орлов,
А. Л. Розенталь

XXIV Международный астронавтический конгресс

С 7 по 13 октября 1973 года в столице советского Азербайджана городе Баку происходил XXIV Международный астронавтический конгресс. Такие конгрессы ежегодно организуются Международной астронавтической федерацией и Международной академией астронавтики. Первая из этих организаций возникла в 1950 году, за несколько лет до запуска первого искусственного спутника Земли. Она представляет собой союз национальных научных обществ, занимающихся исследованием космических проблем. Сейчас в состав Федерации входит 56 организаций-членов из 36 стран. Советским членом Федерации является Комиссия по исследованию и использованию космического пространства Академии наук СССР. Вторая организация объединяет отдельных ученых, работающих в различных отраслях космических исследований. К моменту проведения конгресса в ее рядах состоял 491 член из 29 стран.

В работе конгресса участвовало более 1500 человек из 28 стран. Среди них — советские космонавты Г. Т. Береговой, Б. Б. Егоров, В. И. Севастьянов, В. А. Шаталов, а также американский астронавт Т. Стаффорд.

Конгресс прошел под девизом «Космические исследования: влияние на науку и технику». Чтобы сильнее подчеркнуть это влияние и отдать дань другим международным организациям, два заседания конгресса были посвящены столетию Всемирной метеорологической организации и еще два — 25-летию Всемирной организации здравоохранения.

На конгрессе было прочитано более 350 докладов по различным направлениям космических исследований. Широкому обсуждению подверглись практически все основные проблемы, с которыми человечество сталкивается на пути проникновения в космос. Космические методы изучения окружающей среды и природных ресурсов, технологические процессы в космосе, процессы в ракетных двигателях, газовая динамика космических полетов, научные космические аппараты, использование космической технологии для национального развития, астродинамика, космическая медицина — каждой из этих проблем посвящалось одно или несколько специальных заседаний. Отдельное заседание было посвящено проблемам безопасности в юношеских экспериментах по ракетной технике. Специалисты из Советского Союза, США, ФРГ, Италии и Испании рассказали на нем о работах молодых энтузиастов космических исследований над моделями ракет и ракетных двигателей.

Во время работы конгресса состоялись также VI Международный симпозиум по безопасности и спасанию в космосе, VII Международный симпозиум по истории астронавтики, XVI коллоквиум по космическому праву и III Международная студенческая конференция астронавтической федерации.

Характерной особенностью большинства докладов было то, что в них рассматривались задачи, еще далекие от окончательного решения. Участники конгресса стремились приоткрыть завесу времени, скрывающую от нашего взора будущие космические проблемы. Среди них — создание международной научной лаборатории на планете Марс, международной пилотируемой орбитальной лаборатории и проблемы космического транспорта. Космический транспорт связан с созданием космических кораблей многократного действия, которые, подобно самолетам, могли бы не раз стартовать в космос и возвращаться на Землю. Такие корабли могли бы обслуживать долговременные орбитальные станции — сменять экипажи и снабжать их всем необходимым. Транспортные корабли можно также использовать для инспектирования искусственных спутников — замены их оборудования и ремонта прямо на орбите.

В дискуссии по проблемам создания международной марсианской лаборатории участвовали академик А. А. Михайлов, члены-корреспонденты Академии наук СССР К. Я. Кондратьев и О. Г. Газенко, профессора В. Г. Курт и В. И. Мороз, американские ученые Дрейпер, Пикеринг, Страгхолд, ученые из Франции, Бельгии, Польши и других стран. Основной вывод, к которому пришли участники дискуссии, таков: в настоящее время человечество располагает техническими возможностями и знаниями, необходимыми для создания международной обитаемой станции на орбите, расположенной вблизи Марса, то есть для создания обитаемого искусственного спутника Марса.

Космические исследования постепенно приобретают международный характер. Советские ученые активно сотрудничают с учеными из других социалистических стран, а также с Францией, Индией и другими государствами. О научных результатах, полученных в результате запусков спутников «Интеркосмос», рассказал в первый же день работы конгресса директор Института спектроскопии Академии наук СССР профессор С. Л. Мандельштам.

По взаимной договоренности между правительствами СССР и США в 1975 году должен состояться первый совместный советско-американский космический эксперимент по стыковке кораблей «Союз» и «Аполлон». Времени до этого момента остается еще немало, но участники конгресса уже видели его на экране в научно-популярном фильме, представленном американской делегацией. А вслед за этим был показан наш фильм о совместных советско-американских исследованиях «Беринг». Они были предприняты для разработки методов изучения земных объектов (растительного покрова, характеристик почв, снежного и ледяного покрова) из космоса. Доклад об этих методах от имени большой группы ученых и космонавтов сделал В. И. Севастьянов.

В связи с предстоящими в будущем длительными космическими экспедициями к планетам Солнечной системы участники конгресса подробно обсудили многочисленные научные проблемы долгосрочного пребывания человека во враждебном ему космическом пространстве. Эти проблемы распадаются на две группы. Первая группа касается состояния человека в таком полете. Как скажется на его организме длительное воздействие невесомости? Как повлияет на него длительная разлука с привычным миром и пребывание в необычных условиях — не откажет ли его психика? Как перенесет организм неизбежную ограниченность движений, недостаток физических нагрузок — так называемую гиподинамию?

До сих пор пребывание человека в космосе в различных экспериментах продолжалось не более трех месяцев. Полученные при этом данные, казалось бы, убеждают нас в том, что человеческий организм способен приспосабливаться даже к таким необычным для него условиям. Космонавты обычно возвращались бодрыми и здоровыми. Но окончательный ответ на вопрос о том, насколько безопасным было их пребывание в космосе, могут дать только длительные физиологические и биохимические обследования. Недаром советский врач-космонавт Борис Егоров сказал на одной из пресс-конференций в Баку, что все полученные наукой сведения о влиянии невесомости и других необычных факторов характеризуют поведение либо всего организма в целом, либо отдельных его органов. Но до сих пор остается неясным, как эти факторы сказываются на жизнедеятельности отдельных живых клеток, из которых состоит наш организм. Потребуется еще немало времени, прежде чем мы сможем ответить на такие вопросы.

Вторая группа проблем связана с обеспечением космонавтов всем необходимым для длительных полетов — пищей, кислородом, водой. Если полет сравнительно недолгий, все это удается взять с собой в достаточных количествах. Но в более длительных полетах придется создавать особые замкнутые системы жизнеобеспечения космонавтов. Такие системы должны восстанавливать необходимые компоненты из продуктов жизнедеятельности, осуществлять своеобразный круговорот веществ в миниатюрном мире космического корабля. На конгрессе отмечалось, что американские ученые стремятся использовать для восстановления необходимых продуктов различные физико-химические методы — поглотители, реактивы и т. п. Советские ученые упорно ищут комбинации биологических систем, способные превращать отходы жизнедеятельности в новые полноценные продукты. Особенно большой интерес участников конгресса вызвал доклад красноярских ученых И. А. Терскова, И. И. Гительзона, Б. Г. Коврова и других, «Автономная по управлению система обеспечения жизнедеятельности человека, основанная на фотосинтезе высших и одноклеточных растений». В нем рассказывалось о результатах весьма необычного эксперимента. Группа исследователей несколько месяцев провела в земной модели космического корабля, не получая извне ни кислорода, ни воды. Эти продукты восстанавливались внутри корабля находившимися там растениями. Растения служили также пищей для участников эксперимента. Оранжерея общей площадью в 40 $м^2$ давала ежедневно 760 г пшеничных зерен и 6800 г свежих овощей, обеспечивая 25% потребности «космонавтов» в пище. Особенно важным в этом эксперименте было то, что весь контроль за работой системы жизнеобеспечения находился в руках «космонавтов» и происходил независимо от «земных наблюдателей», как если бы участники эксперимента действительно находились на огромном расстоянии от Земли.

Наибольшее количество докладов было посвящено влиянию космических исследований на земную науку и технику. В приветствии участникам конгресса президент Академии наук СССР академик М. В. Келдыш писал: «Развитие космонавтики оказывает значительное влияние на общий научно-технический прогресс, на интенсивное развитие многих областей прикладных наук и техники. В связи с запросами космической техники созданы десятки новых видов металлических и неметаллических конструкционных материалов, прочные свариваемые сплавы на основе титана, никеля, меди, молибдена, алюминия, специальные высококачественные стали, негорючие, жаропрочные, кислотостойкие и антикоррозийные материалы и покрытия, негазящие высокотемпературные электроизоляционные материалы и герметизирующие уплотнители, различные смазки, неорганические красители и лакокрасочные покрытия. Разработаны новые типы высокоэффективных источников и преобразователей электроэнергии. Большое развитие получили химия топлив и теория горения

...Потребности космонавтики содействовали решению многих вопросов в области автоматизации, совершенствования теории и средств дистанционного управления, систем оперативного контроля за функционированием сложных технических устройств, методов передачи и обработки информации».

Выход человека и научной аппаратуры в космическое пространство оказал революционное воздействие на астрономию. Открылась возможность исследовать все виды электромагнитных излучений далеких космических объектов. Гамма-излучение и рентгеновские лучи, ультрафиолетовое и инфракрасное излучения, радиоизлучения всех длин волн, словом все, что активно поглощается в верхних слоях атмосферы и не достигает поверхности Земли, стало доступно для непосредственного изучения.

Первый же метеорологический спутник революционизировал метеорологию, позволив ученым составлять карты мировой погоды и следить за ее изменениями в масштабах всей Земли. Метеорологические спутники и их помощники — быстродействующие электронные вычислительные машины, а также новая техника связи позволяют сделать реальностью не только точные долгосрочные прогнозы погоды, но и древнюю мечту человечества об управлении ею.

Физика Солнца, физика атмосферы, геомагнетизм, география, гидрология, геология — вот далеко не полный перечень наук, которым космические исследования несут небывалые возможности.

Хотя пора великих географических открытий давно уже прошла, но до сих пор половина поверхности земного шара не имеет точных карт. Даже аэрофотосъемка не может быстро решить эту проблему. Зато спутники, обозревающие огромные участки Земли, позволяют существенно ускорить картографирование земной поверхности.

Даже простые фотографии из космоса несут в себе массу ценной информации. В своем докладе «Применение телеметрических измерений для исследований земных ресурсов с помощью спутников» американский ученый Л. Джаффи показал, что если бы Бразилия воспользовалась снимками, сделанными из космоса, то гигантскую дорогу, которая строится сейчас через всю эту страну, можно было бы проложить по более выгодному маршруту, и стоила бы она намного дешевле.

В последний день работы конгресса был проведен второй Международный симпозиум по внеземным цивилизациям *). Основные доклады на нем были сделаны советскими учеными. В докладе У. Н. Закирова была обоснована принципиальная возможность создания искусственных спутников у некоторых близких к нам звезд — «эпсилон-Эридана», «тау-Кита», «эпсилон-Индейца» и «звезды Барнарда». Предполагается, что у этих звезд существуют свои естественные спутники, то есть они подобно Солнцу имеют планетные системы. В докладе Закирова показано, что для создания искусственных спутников этих звезд (межзвездных зондов) следует использовать ионные или плазменные двигатели, разрабатываемые в данное время. Эти двигатели позволяют отправлять межзвездные зонды на расстояния не более 16 световых лет **), то есть не более 15×10^{13} *км*! Для посылки межзвездных зондов в более далекие области Вселенной потребовались бы фотонные двигатели, возможность создания которых пока еще только обсуждается учеными.

Профессор В. С. Троицкий рассказал в своем докладе о поисках радиоизлучений, которые могли бы оказаться результатом технической деятельности внеземных цивилизаций. Систематические поиски таких излучений проводились в северной небесной полусфере с 1970 года. Исследования велись на радиоволнах дециметрового и сантиметрового диапазонов. Для устранения влияния земных радиопомех прием космического радиоизлучения производился одновременно в четырех далеко отстоящих друг от друга пунктах Советского Союза. Анализировались только те сигналы, которые были одновременно зарегистрированы во всех четырех пунктах. Об аналогичных работах другой группы советских ученых было рассказано в докладе Н. С. Кардашева, Л. М. Гинделиса и др. Поиски радиосигналов космических цивилизаций пока что не увенчались успехом, но их методики непрерывно совершенствуются, а масштабы расширяются.

В. А. Лешковцев

*) О первом таком симпозиуме мы рассказывали в статье: Гинделис Л. М. «CETI в вопросах и ответах» (см. «Квант», 1972, № 11).

**) Световой год — астрономическая единица расстояний, равная длине пути, который свет проходит в пустоте в течение года. Он составляет $9{,}5\cdot10^{12}$ *км*.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. На противоположных берегах реки напротив друг друга растут две пальмы. Высота одной из них 10 метров, другой — 15 метров, расстояние между основаниями пальм равно 25 метрам. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую на поверхность реки между пальмами. Птицы бросились к рыбе и достигли ее одновременно.

На каком расстоянии от основания более высокой пальмы выплыла рыба?

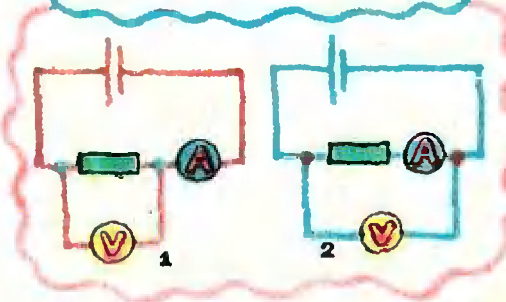
2. На улице идет дождь. В каком случае ведро, стоящее в кузове грузовика, быстрее наполнится: когда грузовик стоит или когда он движется?

3. На лугу растет трава. Пустили на луг 9 коров, они опустошили луг за 4 дня. Если бы на луг пустили 8 коров, то они съели бы всю траву за 6 дней.

Сколько коров могут кормиться на лугу все время, пока растет трава?

4. На чашечных весах уравновешена свеча. Нарушится ли равновесие, когда свечу зажгут? Если нарушится, то в какую сторону?

5. Для того чтобы определить неизвестное сопротивление, имея в своем распоряжении амперметр и вольтметр, один раз собрали схему, показанную на рисунке 1, другой раз — на рисунке 2. Измерили напряжение и ток. В каком случае полученное значение сопротивления будет ближе к истинному?



Художник Э. Назаров

Б. А. Кордемский

Топологические опыты своими руками

Лист Мёбиуса и переплетение колец

Поверхность кольца, надеваемого на палец, имеет две стороны (рис. 1). Одной стороной кольцо соприкасается с пальцем, вторая сторона — наружная. У этих сторон две границы (два края), каждая имеет форму окружности. Если какая-нибудь букашка захочет переползти с наружной стороны кольца на внутреннюю, то она при этом непременно должна пересечь ту или другую границу.

Легко приготовить простую модель поверхности совсем другого «фасона» — не двухсторонней, как поверхность кольца, а односторонней поверхности (рис. 2). Первым описал такую поверхность Август Мёбиус (в 1863 году). Перекрутите на полоборота один конец прямоугольной бумажной полоски и приклейте его к другому концу той же полоски. Получится модель поверхности, у которой нет двух сторон — «внутренней» и «внешней». Эту модель так и называют: «лист Мёбиуса».

Чтобы убедиться в том, что у поверхности листа Мёбиуса только одна сторона, возьмите цветной карандаш и начните последовательно закрашивать лист, не отрывая карандаша от его поверхности и не пересекая края листа. Вернувшись к тому месту, с которого начали, вы увидите, что окажется окрашенной вся поверхность листа, хотя его край вы и не пересекали ни разу.

Возьмите теперь несколько листов бумаги поплотней, клей, ножницы и проделайте несколько практических упражнений с листом Мёбиуса и другими моделями, изготовляемыми из прямоугольных полосок бумаги.

Опыт 1. Что получится, если обыкновенное (не перекрученное) бумажное колечко разрезать вдоль его средней линии? Очевидно — два колечка, причем длина окружности каждого будет такой же, как длина ок-

См. «Квант», 1974, № 2, с. 58.

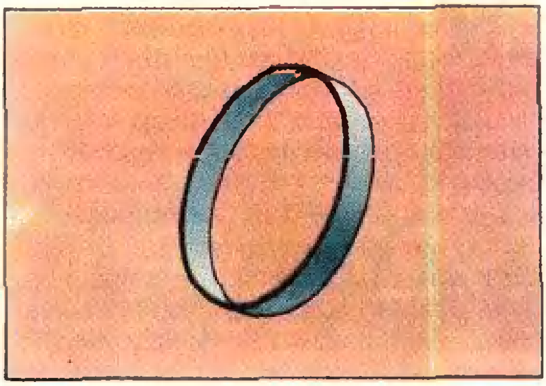


Рис. 1.

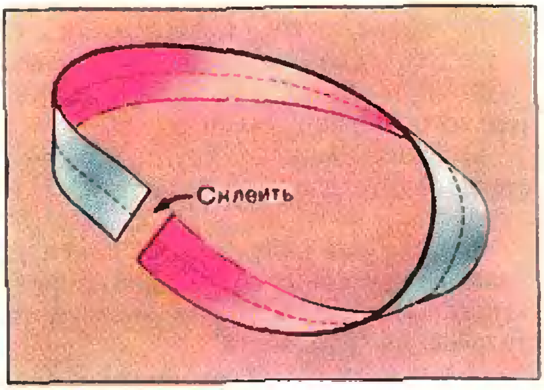


Рис. 2.

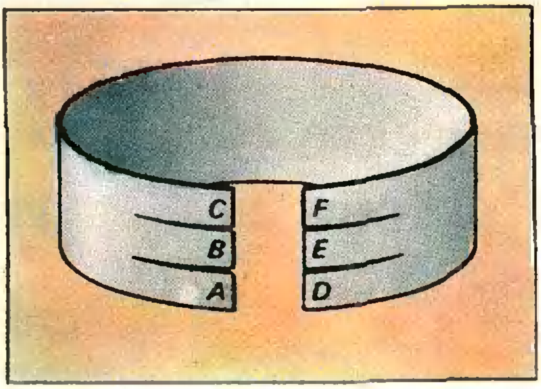


Рис. 3.

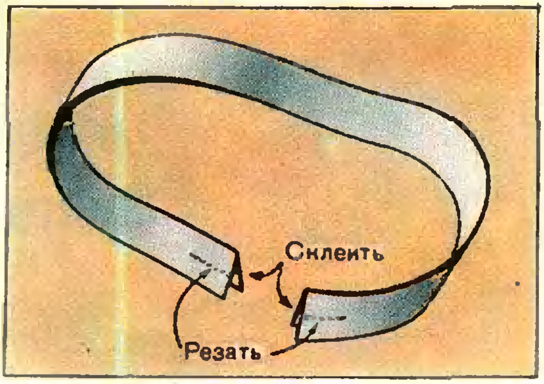


Рис. 4.

ружности первоначально взятого колечка. А если вы разрежете лист Мёбиуса вдоль его средней линии, то получится...

Проделайте и посмотрите, что получится.

Опыт 2. Приготовьте второй лист Мёбиуса из достаточно широкой полоски и разрезайте его ножницами так, чтобы линия разреза все время шла вдвое ближе к левому краю полоски, чем к правому (линия разреза обойдет лист Мёбиуса дважды). Вот теперь образуется...

Тот же результат получится, если вновь взять бумажную полоску; один ее конец перекрутить на полный оборот (на 360°), приклеить к другому концу и разрезать получившуюся модель по средней линии.

Опыт 3. Надрежьте концы бумажной полоски, как показано на рисунке 3. Склейте концы A и D. Пропустите конец B под A и приклейте его к E. Пропустите конец C между B и A, а конец F между D и E, после чего склейте концы C и F. Все склеивания концов производите прямо, то есть без предварительного перекручивания.

а) Теперь каждый начатый разрез продолжайте вдоль всей модели. Получится...

б) Если вы ошибетесь и конец C приклеите к концу F, не пропустив C между B и A, то после указанного разрезания получится...

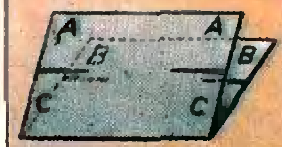
Опыт 4 (предложен Э. Стеньоном в 1930 году). Еще раз приготовьте бумажную полоску с надрезами (рис. 3). Поверните конец E направо (верхним концом от себя) и склейте с концом C. Поверните конец F направо и приклейте к концу B. Пропустите конец A под B и склейте его с концом D без перекручивания. Теперь продолжайте первый и второй разрезы вдоль всей модели — получится...

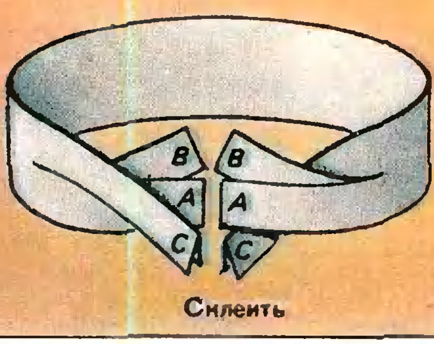
Опыт 5. Любопытно решение такой задачи: подготовить из бумажной полоски модель, из которой можно было бы получить переплетение (в частности, обычную цепь) n колец при помощи лишь одного сквозного разрезания. (Авторы темы M. Brooke and J. Madachy.)

Секрет решения заключен в первоначальном сгибании полоски по ее длине еще до разрезания и в способе склеивания надрезанных концов согнутой полоски.

Начните с полоски, перегнутой по длине один раз (рис. 4). Перекрутите ее на полный оборот (360°) и склейте концы, накладывая «домиком» один конец на другой. Теперь разрежьте двойной слой склеенной ленты по ее средней линии — получатся три кольца, сцепленные попарно.

Опыт 6. Согните бумажную полоску и сделайте надрезы, как показано на рисунке 5. Не перекручивая, склейте концы согнутой полоски, так, как показано на рисунке 6. Продолжайте разрез вдоль всей модели по двойному слою.





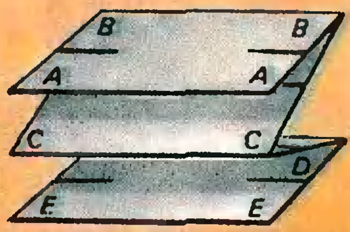


Рис. 5.

Рис. 6.

Рис. 7.

а) Если сделано все точно, то получится...

б) Если вы допустите некоторое отклонение от инструкции, то могут получиться...

Опыт 7. Чтобы получить цепь из колец с помощью всего лишь одного сквозного разреза, возьмите достаточно широкую полоску бумаги и согните ее «гармошкой» (рис. 7). Надрежьте концы, как показано на рисунке, придайте согнутой полоске форму кольца и склеивайте такие концы: C и C, D и D, E и E — прямо, как они соединялись бы при смыкании концов полоски для образования простого кольца; B и B — предварительно протащив один из этих концов под кольцами CC и DD; A и A — предварительно протащив один из этих концов под кольцами CC и EE.

а) Теперь продолжайте разрез вдоль модели по всем складкам — получится...

б) Если работа будет выполнена с некоторым отклонением от инструкции (по ошибке или преднамеренно), то все равно получится ...

Ответы к предыдущим задачам и опытам приведены в конце журнала. К следующим шести опытам указаний не будет. Придется самостоятельно искать пути решения. Ставим такое условие: добиться результатов с помощью одного сквозного разреза модели, сконструированной из бумажной полоски, некоторым образом согнутой, надрезанной и концы которой склеены.

Опыт 8. Изготовить цепь в 4 кольца.

Опыт 9. Изготовить две отдельные цепи в 2 и 3 кольца каждая.

Опыт 10. Изготовить цепь в 3 кольца с четвертым кольцом, зацепившимся за среднее кольцо.

Опыт 11. Изготовить цепь в 9 колец.

Опыт 12. Изготовить три отдельных куска цепи по 3 кольца в каждом куске (из одной бумажной полоски).

Опыт 13. Изготовить отдельный кусок цепи в 4 кольца и второй отдельный кусок цепи в 5 колец (из одной бумажной полоски).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Проективные шахматы»

1. 1. Фg4 — d1 — M_1! В распоряжении черных — ходы ладьей, слоном или конями. При ходе ладьи d6 или слона c4 на любое конечное поле доски их с матом берет белый ферзь с M_1. Если ладья d6 идет на поле O_y (через d8), то ее берет белая ладья с матом, а если слон c4 бьет ферзя на M_1, то этого слона с матом берет белый слон h3. Наконец, на любой ход коня h7 следует 2. Kf6 мат, а на любой ход коня g6 — 2. Ke7 мат.

2. 1. Cd4 — h8 — M_1! (с угрозой 2. c3 — c4 мат) 1...Ch3 — f1 2. Kh4 — g2! (с угрозой 2: Kg2 : e3 мат) 2...Cf1 : g2 3. c3 — c4 мат; 1...Ch3 — M_2 2. Kh4 — g2! Kg3 — f1 3. c3 — c4 мат!

К статье «Об одной интересной книге по математике»

1. Существуют две схемы.

3. Для одной схемы — изменить ориентацию лицевой матрицы. Для другой — разделить лицевую матрицу пополам горизонтальной осью, поменять местами половины, не изменяя ориентации.

К статье «Читатели советуют»

1. Убедиться, что требуемым свойством обладает значение $n = 4$, а роль p играет число 7.

2. Убедиться, что требуемым свойством обладает значение $n = 2$, а роль p играет число 3.

3. Показать, что $\log_4 60 < 3 < \log_3 30$.

4. Переписать предложенное неравенство в виде

$$\frac{\sqrt[m]{c+1} - \sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c} - \sqrt[m]{c-1}} < 1,$$

для дальнейшего доказательства использовать равенства

$$1 = \left(\sqrt[m]{c+1}\right)^m - \left(\sqrt[m]{c}\right)^m,$$

$$1 = \left(\sqrt[m]{c}\right)^m - \left(\sqrt[m]{c-1}\right)^m$$

и разложение их правых частей на множители (см. с. 49).

5. $B =$

$$= \frac{x}{m+\sqrt{m^2-x^2}} \cdot \frac{2m+\sqrt{m^2-x^2}}{2m-\sqrt{m^2-x^2}}.$$

Указание. Применить подстановку $x = m\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

6. Наибольшее значение равно 2 и достигается при $x = 1$, наименьшее значение равно 0 и достигается при $x = -1$.

7. Перегнуть лист бумаги так, чтобы положительное направление оси x совпало с положительным направлением оси y. Тогда линия сгиба будет биссектрисой $y = x$ первого координатного угла, пересекающейся с графиком $y = x^2$ в точке (1, 1). Перпендикуляр, опущенный из этой точки на ось, даст возможность установить единицу длины.

8. $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{-11 \pm 3\sqrt{11}}{2}$.

Указание. Переписать уравнение в виде

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\right)^2} = 11$$

и использовать замену $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{10}$.

9. $x_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{\sqrt{10}-3}\right)^2$. Указание. Положив $\sqrt{x} = z$, переписать уравнение в виде $z^4 + (z-2)^4 = 4$. Показать, что получающиеся действительные значения x являются корнями исходного уравнения.

10. $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$.

11. $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Указание. Использовать замену $y = x - 2$.

12. $x_1 = -5$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Указание. Использовать замену $y = x + \dfrac{3}{2}$.

К статье «О законе сохранения энергии в механике»

1. В процессе соударения на шарик со стороны стенки действует сила, направленная все время в одну сторону. Поэтому импульс меняется:

$$\Delta(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}\Delta t.$$

Перемещение шарика в процессе соударения сначала происходит против силы $\mathbf{F}$, а затем по направлению $\mathbf{F}$. Поэтому работа

$$A = -F\Delta s + F\Delta s = \Delta K = 0.$$

Работа, а значит, и изменение кинетической энергии за время соударения равны нулю.

2. Давление воды у дна стакана больше, чем у поверхности. Поэтому кинетическая

энергия воды, втекающей в сосуд, открытый у дна, больше, чем кинетическая энергия воды, втекающей в сосуд у поверхности. В конце концов кинетическая энергия переходит в тепло. Следовательно, вода больше нагреется во втором случае, чем в первом.

3. В движущейся системе отсчета сила реакции плоскости не перпендикулярна скорости кубика. Она и совершает работу, уменьшающую энергию кубика.

4. Изменение импульса тела равно импульсу приложенной к нему силы. Так как силы тяготения, действующие на камень и Землю, равны по величине и действуют одинаковое время, то равны и изменения импульсов этих тел.

Изменение кинетической энергии тела равно работе силы, которая зависит от силы и от перемещения. Силы одинаковы, а перемещения камня и Земли, обратно пропорциональные их массам, различны. За время падения камня перемещение Земли будет столь малым, что им можно пренебречь. Поэтому закон сохранения энергии можно записать в форме, не учитывающей изменение кинетической энергии Земли.

К статье «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Математика

Химический факультет

1. 18 коп.

2. $x \leqslant 0$, $1 \leqslant x < \log_3 5$. Указание. Ввести новое неизвестное $y = \log_2 (5 - 3^x)$.

3. $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{\pi}{6}$.

4. $V = 4(1 + \sqrt{10})^3$, $\alpha = \arccos(-1/10)$. Указание. Заметьте, что радиус первого шара равен трети высоты пирамиды.

5. Оба острых угла равны 45°.

Факультет биологии

1. 6 *час.*

2. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$; k, n — целые числа.

3. $x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; k — целое число.

4. 5/12.

5. $a \geqslant 2$. Указание. Найти все действительные значения a, при которых трехчлен $y = z^2 - az - (a + 3)$ имеет хотя бы один неотрицательный корень.

Геологический факультет

1. $x = 1$, $y = (-1)^k \frac{\pi}{6} - 1 + k\pi$; k — целое число.

2. $x > -2$.

3. $9 + \sqrt{11}$ *км/ч.*

4. $1/2 < x < 2$, $x \neq 1$, $x \neq 3/2$.

5. $\sqrt{2}$ *см.*

Факультет почвоведения

1. 9 юношей и 6 девушек.

2. Второе выражение больше.

3. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = (-1)^n \times \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{\pi}{4} + n\pi$; k, n — целые числа.

4. 7.

5. $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

Географический факультет

1. 14 *м/ч* и 18 *м/ч.*

2. Предложенное выражение равно 6.

3. $\sqrt{10}$.

4. $x = -2 + \sqrt{4 - 2\log_3 5}$.

5. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; n — целое число.

Физика

1. Обозначим точки, где находились первоначально заряды q_1 и q_2, буквами P и Q. Пусть расстояние между этими точками равно L. Удалим временно заряд q_1 в бесконечность. При этом, согласно определению потенциала, нужно совершить работу $A_1 = -q_1(\varphi_{0P} + \varphi_{2P})$, где $\varphi_{0P} = q_0/4\pi\varepsilon_0 l_1$ и $\varphi_{2P} = q_2/4\pi\varepsilon_0 L$ — потенциалы в точке P, создаваемые зарядами q_0 и q_2. Переместим теперь заряд q_2 в точку P. Для этого потребуется совершить работу $A_2 = q_2(\varphi_{0P} - \varphi_{0Q})$, где $\varphi_{0Q} = q_0/4\pi\varepsilon_0 l_2$ — потенциал в точке Q, создаваемый зарядом q_0. Наконец, возвратив из бесконечности заряд q_1 в точку Q, мы совершим работу $A_3 = q_1(\varphi_{0Q} + \varphi_{2Q})$, где $\varphi_{2Q} = \varphi_{2P} = q_2/4\pi\varepsilon_0 L$ — потенциал в точке Q, создаваемый зарядом q_2, находящимся в точке P. Полная работа, совершенная при перемещении зарядов q_1 и q_2, равна

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{q_0(q_2 - q_1)(l_2 - l_1)}{4\pi\varepsilon_0 l_2 l_1} = 3\cdot 10^{-4}\ \text{дж}.$$

2. Самолет спускается по прямой линии, составляющей с горизонтом угол α, причем $\sin\alpha = \frac{h_1 - h_2}{l}$. На самолет действуют: сила тяжести, направленная вертикально вниз и равная mg, подъемная сила, направленная перпендикулярно линии движения самолета, и сила f сопротивления воздуха, направленная в сторону, противоположную движению.

Так как самолет движется равномерно, то векторная сумма сил равна нулю. Следовательно, равна нулю и сумма проекций всех сил на направление движения. Из последнего условия легко найти, что $f = mg\sin\alpha = mg\frac{h_1 - h_2}{l}$. Когда самолет поднимается (по условию, вдоль линии, составляющей с горизонтом тот же угол α), то, кроме перечисленных выше сил, на него действует еще сила тяги F, создаваемая мотором и направленная в сторону движения. Сила сопротивления f имеет ту же величину, так как скорость самолета не изменилась. Так же, как и при спуске, сумма проекций сил на направление движения равна нулю, причем проекция $mg\sin\alpha$ силы тяжести и проекция f силы сопротивления направлены против движения, а проекция F силы тяги — в сторону движения. Следовательно, $F = mg\sin\alpha + f = 2mg\frac{h_1 - h_2}{l}$.

Как известно, мощность $N = Fv$. Таким образом, при подъеме мотор самолета развивает мощность

$$N = 2mgv\frac{h_1 - h_2}{l} = 200\ квт \approx 272\ л.\ с.$$

3. Давление воды на масло, согласно закону Паскаля, $p = p_1 + p_0$, где $p_1 = \rho_0 g(h + H)$ — гидростатическое давление столба воды, $\rho_0 = 10^3\ кг/м^3$ — плотность воды, $g \approx 10\ м/с^2$ — ускорение свободного падения. С другой стороны, давление на воду со стороны масла также должно быть равно p, так как граница масла и воды неподвижна. Оно складывается из давления $p_2 = F/S$, которое оказывает на масло дно сосуда, и гидростатического давления столба масла $p_3 = \rho g h$. Таким образом, $p = p_1 + p_0 = p_2 + p_3$. Отсюда $F = S\,[p_0 + \rho_0 g(h + H) - \rho g h] \approx 1{,}22\cdot 10^4\ н$.

4. Пусть A — точка, а B — ее изображение, когда линза Л находится в первоначальном положении (рис. 1). Расстояние a от точки до линзы можно найти из формулы линзы $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$. Знаки «минус» в формуле стоят потому, что изображение и фокус в случае рассеивающей линзы мнимые.

Отсюда $a = \frac{fb}{f - b}$. Когда линза сдвинута и занимает положение Л′, изображение находится на побочной оси линзы в плоскости, лежащей на том же расстоянии b от линзы (точка B'). Искомое расстояние $l = BB'$. Из подобия треугольников ABB' и AOO', где O и O' — центры линзы в начальном и конечном положениях, следует: $\frac{l}{L} = \frac{a - b}{a}$.

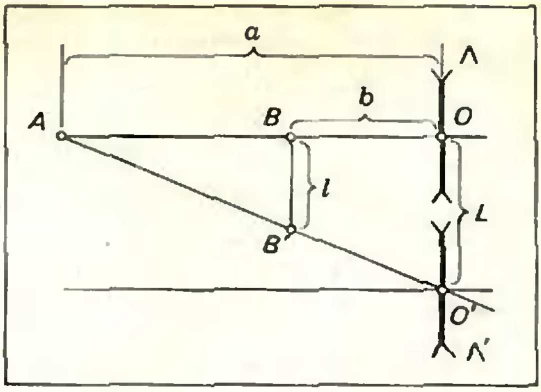


Рис. 1.

Отсюда, учитывая значение a, найдем $l = \frac{(a - b)\cdot L}{a} = \frac{Lb}{f} = 1{,}2\ см.$

К статье «Встречи с тремя неизвестными»

1. а) 186 859 + 96 959 = 283 818; 385 869 + 95 969 = 481 838; 387 869 + 97 969 = 485 838;

б) 6923 + 6943 = 13 866; 6943 + 6923 = 13 866; 6523 + 6543 = 13 066; 6543 + 6523 = 13 066;

в) БУЕР — это 1972, 5472 или 8632.

2. Будем производить следующий цикл действий:

а) наливаем воду в 17-литровый бидон;

б) наполняем из него 12-литровый; воду из 12-литрового выливаем в бочку;

в) то, что осталось в 17-литровом, переливаем в 12-литровый (если он наполнится, то выливаем содержимое в бочку и снова переливаем остаток из 17-литрового в 12-литровый).

Шесть раз наполнив большой сосуд, наберем в общей сложности 102 литра. Из малого бидона вода будет вылита 8 раз, всего 96 литров. Останется ровно 6 литров.

3. 7980 : 95 = 84 или 7030 : 95 = 74.

4. Два шестиугольника могут разделить плоскость на 38 частей (рис. 2), а два выпуклых — только на 14. Докажите, что число частей, на которые делят плоскость два многоугольника, равно числу точек пересечения их сторон, увеличенному на 2.

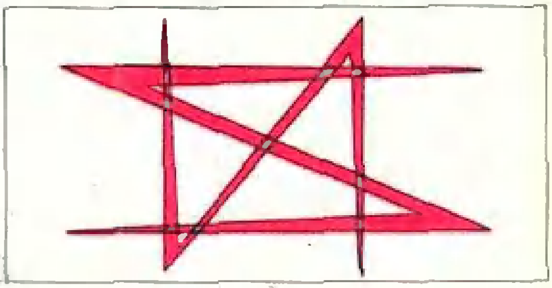


Рис. 2.

5. Последняя цифра произведения определяется по последним цифрам множителей: $7, 7 \times 7, 7 \times 7 \times 7, 7 \times 7 \times 7 \times 7, 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7, 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7, \ldots$ Эти числа оканчиваются на 7, 9, 3, 1, 7, 9,... соответственно, последние цифры повторяются через три на четвертую. Ответ: 9.

6. Ноги естественно считать парами. Перевяжем красной ленточкой по одной паре ног у каждого из «присутствующих». Тогда неперевязанных ног останется 13 пар — по одной паре у каждой собаки, по две пары у каждой мухи. Понятно, что мух не больше шести. И если в комнате 1, 2, 3, 4, 5, 6 мух, то собак соответственно 11, 9, 7, 5, 3, 1. Первые три случая не подходят (люди-то есть!), остальные дают три решения — 1, 2, 3 человека соответственно.

7. Участки можно разбить на пары не имеющих друг с другом общих сторон. Докажите, что произведения площадей участков каждой пары равны между собой. Ответ: площадь четвертого участка может быть равна 4/3 *га*, 3 *га*, 12 *га* (участок, входящий в пару с четвертым, имеет площадь 6 *га*, 4 *га*, 2 *га* соответственно).

8. Ответ: в этом классе 12 скрипачей; плавают, но не разводят хомяков 2 ученика; ребят, разводящих хомяков, но не плавающих и не играющих на скрипке, может быть 0, 1, 2, . . . , 22. Для наглядности полезно нарисовать три пересекающихся круга — один для скрипачей, второй — для пловцов, третий — для разводящих хомяков. Тогда плавающие скрипачи будут стоять в пересечении первого и второго округов, а 3 человека, занимающиеся всеми тремя видами полезной деятельности — в пересечении всех трех кругов и т. д.

К статье «Топологические опыты своими руками»

(см. «Квант» 1974, №№ 2, 3)

Задача 1. Например, так, как на рисунке 3.

Задача 2. Одна из карт изображена на рисунке 4.

Задача 3. Например, так, как на рисунке 5.

Опыт 1. . . . одно перекрученное кольцо.

Опыт 2. . . . 2 кольца, но они будут сцеплены.

Опыт 3. а) . . . переплетение трех колец.

б) . . . цепь из трех колец.

Опыт 4. . . . 2 сцепленных кольца: одно большое и одно маленькое.

Опыт 6. а) . . . цепь из 3 колец.

б) . . . три разрозненных кольца.

Опыт 7. а) . . . цепь из 5 колец.

б) . . . 5 колец, частично переплетенных, частично сцепленных.

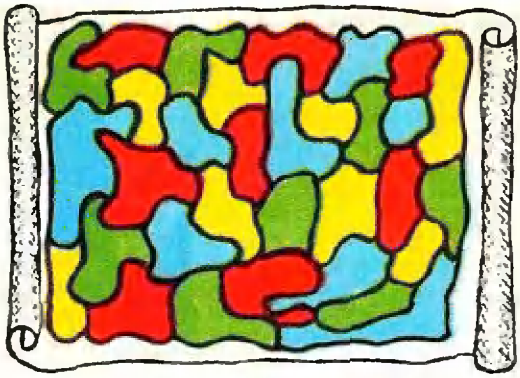


Рис. 3.

К статье «Игра в 15»

(см. «Квант», 1974, № 2)

1. а) Проверяется индукцией по n.

б) Если меняются местами соседние числа, то утверждение очевидно: прибавляется или исчезает один беспорядок. Если между числами i и j, которые меняются местами, стоят s чисел:

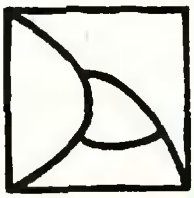
$$\ldots, i, k_1, k_2, \ldots, k_s, j, \ldots,$$

то транспозицию чисел i и j можно получить, последовательно выполнив $2s+1$ транспозицию соседних чисел.

в) Воспользуйтесь следующим предложением, которое доказывается индукцией по n: *все перестановки из n чисел можно выписать в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей одной транспозицией (причем начинать можно с любой перестановки)*, или заметьте, что четные и нечетные перестановки получаются друг из друга переменой мест первых двух чисел перестановки.

2. Перестановок из n чисел в n раз больше, чем перестановок из $(n-1)$ числа.

3. Раскрасим коробочку для игры в 15, как шахматную доску. При каждом передвижении шашки цвет свободной клетки меняется. На рисунках 1 и 2 в статье свободна одна и та же клетка. Значит, от одного из приведенных на них расположений к дру-



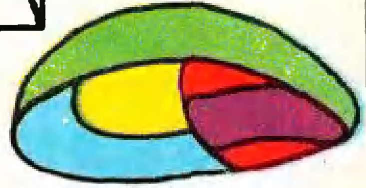


Рис. 4. Рис. 5.

тому нельзя перейти, сделав нечетное число передвижений шашек.

4. См. решение задачи 1, б).

6. При циклическом сдвиге строки, не содержащей пустых клеток, четность перестановки, соответствующей расположению шашек, меняется.

Кроме того, в этой игре можно делать то же, что и в игре в 15. Значит, любое расположение шашек можно перевести в любое другое (используя не более одного циклического сдвига).

7. а) Можно. Для доказательства каждому расположению шашек сопоставим перестановку из чисел 1, . . ., 16 по следующему правилу. Сначала выпишем номера шашек в 1-й строке, потом во 2-й, 3-й и 4-й (в каждой — слева направо). Проделаем над «нормальным» расположением следующие преобразования: сдвинем циклически 1-ю строку влево, потом 1-й столбец вверх, потом 1-ю строку вправо и, наконец, 1-й столбец вниз:

$$\begin{array}{ccccc} \leftarrow & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \uparrow & & & \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 5 & 3 & 4 & 1 & \rightarrow \\ 9 & 6 & 7 & 8 & \\ 13 & 10 & 11 & 12 & \\ 2 & 14 & 15 & 16 & \end{array}$$

(а) (б) (в)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 7 & 8 \\ 13 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 14 & 15 & 16 \\ \downarrow & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}$$

(г) (д)

Эту серию преобразований коротко обозначим так: (1←, 1↑, 1→, 1↓). Наши 4 преобразования перевели перестановку 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . ., 16 в 2, 5, 3, 4, 1, 6, 7, . . ., 16: числа 1, 2, и 5 передвинулись циклически, остальные остались на месте. Применяя к расположению (д) аналогичные 4 преобразования (2→, 2↓, 2←, 2↑), получим расположение, характеризуемое перестановкой 2, 6, 3, 4, 5, 1, 7, . . ., 16. Серия (1←, 2↑, 1→, 2↓), примененная к полученному расположению, приводит к перестановке 2, 3, 1, 4, 5, 6, 7, . . ., 16. В результате 12 преобразований числа 1, 2, 3 передвинулись по циклу. Тройки чисел (1, 2, 3) и (4, 3, 2) в «нормальном» расположении (а) равноправны. Поэтому легко подобрать 12 преобразований, которые переводят расположение (а) в расположение, характеризуемое перестановкой 1, 4, 2, 3, 5, 6, 7, . . ., 16. Применяя к полученному расположению 12 преобразований, выписанных вначале, получаем: 4, 2, 1, 3, 5, 6, 7, . . ., 16. Циклический сдвиг 1-й строки приводит окончательно к 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 16 (числа 1 и 2 поменялись местами).

б) В игре в 16 на торе любые две соседние клетки равноправны. Поэтому в задаче 7, а) фактически доказано, что любые две соседние шашки можно поменять местами. Согласно упражнению 4 отсюда следует, что любое расположение шашек можно перевести в любое другое.

в) Разберитесь сначала с игрой в 9 на торе. Обратите внимание на то, что случаи четного и нечетного n принципиально различны.

К задачам «Квант» для младших школьников
(см. «Квант», 1974, № 2)

1. 5 школьников; 1, 4, 5, 6, 9 коп.
2. Одинаково.
3. 684 259 × 2 = 1 368 518.
4. См. рис. 6.
5. 317.
6. Нет. Замененная лампочка будет гореть слабее, так как ее сопротивление меньше, чем у остальных лампочек, а ток в цепи практически не изменится.

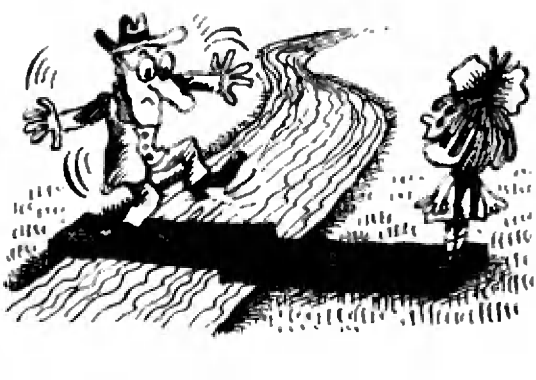


Рис. 6.

К «Чайнворду»
(см. «Квант», 1974, № 2, 4-ю с. обл.)

1. Понселе. 2. Евклид. 3. Дезарг. 4. Галуа. 5. Архимед. 6. Дюйм. 7. Монж. 8. Жирар. 9. Румб. 10. Бурбаки. 11. Интеграл. 12. Лудольф. 13. Фалес. 14. Софизм. 15. Мерсени. 16. Нигилистка. 17. Абак. 18. Каши. 19. Ибн-Сина. 20. Амбарцумян.

Корректор *Н. Б. Румянцева*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 17/XII-73 г. Подписано в печать 7/II-74 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,60
Тир. 384 055 экз Т-02954
Цена 30 коп. Заказ 2543

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ БЕНДЖАМИНУ ФРАНКЛИНУ

Бенджамин (Вениамин) Франклин (1706—1790 гг.)— выдающийся американский политический и общественный деятель, дипломат, журналист, ученый; один из образованнейших людей своего времени.

Франклин основал в Филадельфии первую в США публичную библиотеку, организовал Американское философское общество, основал Пенсильванский университет.

Научные интересы Франклина были очень широки, но главной областью его исследований явилась физика. Наиболее известны исследования Франклина в области электричества. Он объяснил принцип действия лейденской банки, ввел общепринятое в настоящее время обозначение двух противоположных состояний заряженных тел знаками «+» и «−».

Франклин проделал блестящие эксперименты по изучению атмосферного электричества. Он продемонстрировал электрическую природу молнии, пришел к выводу о том, что грозовые облака заряжены большей частью отрицательно. Им также было предложено эффективное средство защиты от грозового разряда — громоотвод.

Марки, посвященные Бенджамину Франклину, выпускались неоднократно. На фото вы видите три марки с портретом Франклина, выпущенные на его родине в США, и пять марок, выпущенных к его 250-летию в СССР, Румынии, Болгарии, Аргентине, на Кубе и во Франции.

А. В. Алтыкис

Цена 30 коп.
Индекс 70465

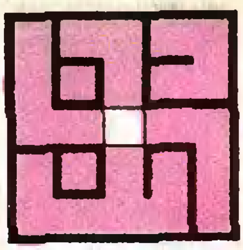
ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЛАБИРИНТ

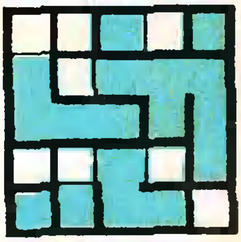
Всем известны лабиринты, коридоры которых лежат в одной плоскости. Но в природе существуют и пространственные лабиринты, коридоры которых расположены на разных уровнях. Это пещеры. Исследователи пещер — спелеологи — обладают хорошо развитым пространственным воображением. Они сравнительно легко ориентируются в хитросплетениях переходов, поворотов, подъемов, спусков и тупиков. Станем и мы на некоторое время спелеологами.

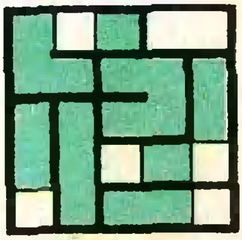
Перед вами план этажей пространственного лабиринта. Номера этажей помечены соответствующими цифрами, цифрой 6 обозначена крыша. Все планы ориентированы одинаково (направление «юг — север» на них одно и то же). Черными линиями обозначены непроницаемые перегородки, белым цветом — отверстия в полу, сквозь которые можно переходить с одного этажа на другой (вверх — через отверстие в потолке). Требуется, войдя в отверстие в крыше и пройдя по переходам, выйти сквозь отверстие в полу первого этажа. Можно двигаться и в противоположном направлении, входя с подпола первого этажа и выходя на крышу.

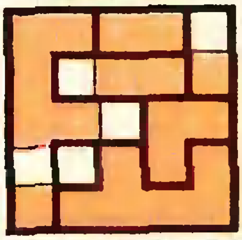
Лабиринт можно сделать из листового прозрачного плексигласа, и пропускать через него шарик для настольного тенниса. В таком случае ширина коридоров и высота этажей должна составлять 40—45 мм (не забудьте учесть толщину плексигласа!). На рисунке показан пол третьего этажа с установленными на нем внутренними перегородками и вырезанными в полу отверстиями (наружные стены делаются общими для всего лабиринта). При накладывании этажей нужно быть внимательным: не перепутать их друг с другом и не изменить ориентацию. Выходное отверстие в крыше обводится какой-нибудь краской, чтобы его не спутать с выходом в полу первого этажа. Запустив шарик, вы можете для облегчения работы переворачивать лабиринт.

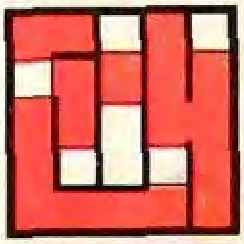
Ваш лабиринт будет интересным и полезным развлечением для друзей.

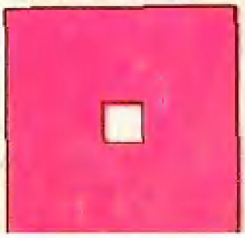

1


2


3


4


5


6